

R.O. G.J. Cremona.

STATIQUE
DES VOUTES.

STATIQUE

DES VOUTES,

Contenant l'Essai d'une nouvelle Théorie de la Poussée, et un Appendice sur les anses de Panier;

PAR J. B. BERARD,

Juge au Tribunal de Briançon; Principal et Professeur de Mathématiques au Collége de la même ville; Membre de la Société d'Agriculture du département de la Seine, des Sociétés littéraires de Grenoble, Gap, Carpentras et Avignon.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57;

Et à La Haye, chez IMMERZEEL et Compagnie, Libraires.

1810.

PRÉFACE.

M. Bossut, membre de l'Institut national, est l'auteur qui a traité avec le plus de détail la partie de la Statique, qui a pour objet l'équilibre des voûtes : son Traité se trouve à la fin de sa Mécanique, imprimée en 1802. Il est précédé d'une introduction qui sert à faire connaître l'objet de la Statique des voûtes, ainsi que l'historique de cette science. Je transcrirai ici cette introduction, afin de mettre le lecteur à même d'apprécier mon travail : je rendrai compte ensuite des motifs qui m'ont déterminé à traiter le même sujet, et des différences qui distinguent mon Ouvrage de tous ceux qui l'ont précédé.

« Tout le monde sait que les pierres ou les *voussoirs* » dont une voûte est composée, forment des espèces de » pyramides tronquées, qui, en s'appuyant les unes contre » les autres par leurs faces latérales et inclinées, se contrebalancent mutuellement, et demeurent suspendues en » l'air sans le secours d'aucun soutien inférieur; tout leur » effort se dirige vers les massifs, ou pieds-droits qui » soutiennent la voûte, comme si elle n'était qu'un seul et » même corps continu. Les voussoirs éprouvent l'action de » différentes forces, qui proviennent ou de leurs poids, ou » de pressions extérieures, ou du frottement, ou de la » cohésion des matières, etc. Toutes ces forces et les résistances des pieds-droits composent un système qui doit » être en équilibre, et de plus, cet état d'équilibre doit avoir » une consistance ferme et durable.

» Les forces particulières qui agissent de proche en pro-

» che sur chaque voussoir peuvent être fort différentes. Par » exemple, dans une voûte demi-circulaire, le voussoir du » milieu ou la clef, agit comme un coin contre le second voussoir à droite et à gauche, et tend à le faire remonter; le second voussoir agit de même contre le troisième; celui-ci » contre le quatrième, ainsi de suite. Or, à mesure qu'on » s'éloigne de la clef, les angles que forment les faces latérales des voussoirs avec l'horizon vont en diminuant; » d'où il résulte que les pressions absolues des voussoirs » doivent aller en augmentant, afin que les efforts résultans de ces pressions, perpendiculairement aux faces contiguës des voussoirs, soient égaux de proche en proche, » et se fassent mutuellement équilibre.

» En général, quelles que puissent être la figure d'une » voûte et la nature des forces qui agissent sur les voussoirs, il doit exister entre toutes ces forces une relation » telle que, tous les voussoirs, qui forment réellement des » corps séparés, soient maintenus en équilibre dans toute » l'étendue de la voûte, sans quoi elle se déformerait et » tomberait par pièces : ensuite, lorsque cet équilibre partiel sera établi, on pourra considérer la voûte comme un » corps continu, et il ne s'agira plus que de déterminer les » dimensions que les pieds droits doivent avoir pour en » soutenir la poussée, ou pour la porter sans s'écraser.

» Il ne paraît pas que les anciens architectes fussent conduits par des principes certains et géométriques dans la » recherche des moyens qu'ils employaient pour assurer la » solidité de leurs édifices. L'expérience, l'imitation, et une » mécanique naturelle, leur servaient de guides. Vitruve, » qui florissait sous Auguste, et qui a rassemblé dans son » *architecture* toutes les connaissances qu'il regarde comme

» nécessaires à ceux qui exercent cet art, ne parle aucu-
» nement des secours qu'ils doivent emprunter de la mé-
» canique pour connaître et décomposer les forces, et pour
» renvoyer leurs efforts vers des appuis capables de les sou-
» tenir. Il ne dit rien non plus de *l'art du trait*, ou de la
» coupe des pierres et des bois. Vraisemblablement les an-
» ciens architectes, occupés d'une manière exclusive de tout
» ce qui regardait la décoration externe et la distribution
» interne de leurs édifices, abandonnaient entièrement aux
» appareilleurs la partie de l'art, qui a pour objet la soli-
» dité et le détail des moyens de construction : en quoi
» ils ont eu malheureusement trop d'imitateurs parmi les
» modernes.

» On n'a commencé que très-tard à sentir la nécessité de
» soumettre le problème de l'équilibre des voûtes aux lois
» de la mécanique. En 1695, la Hire, dans son *Traité de*
» *mécanique*, établit par la théorie du coin la proportion
» suivant laquelle on doit faire augmenter les poids absolus
» des voussoirs, depuis la clef jusqu'aux *impostes*, dans une
» voûte demi-circulaire. L'historien de l'Académie des
» Sciences rapporte, sous l'année 1704, que Parent dé-
» termina, suivant les mêmes principes, mais seulement
» par points, la figure que doit avoir l'extrados d'une
» voûte dont l'intrados est un demi-cercle, et qu'il donna
» de plus la mesure de la poussée d'une telle voûte contre
» les pieds droits.

» J'ignore si cette solution a été imprimée.

» Les deux illustres frères, Jacques Bernoulli et Jean
» Bernoulli, Huyghens et Leibnitz, ayant résolu, en 1791,
» le problème de la *chaînette*, les géomètres ne tardèrent
» pas à s'apercevoir que la figure de cette courbe, retour-

» née de bas en haut, est celle qu'on doit donner à une » voûte composée de voussoirs infiniment petits et également pesans, pour que toutes ses parties soient en » équilibre. David Gregori fit remarquer le premier cette » identité, dans les *Transactions philosophiques* pour l'an- » née 1707; mais son raisonnement, quoiqu'exact, n'avait » pas toute la clarté qu'on pouvait desirer.

» On trouve dans l'un des Mémoires posthumes de Jac- » ques Bernoulli deux solutions directes du problème, » fondées sur deux différentes manières d'envisager l'action » des voussoirs. La première est claire, simple, exacte, et » conduit facilement à la véritable équation de la courbe » qui est la chaînette retournée; la seconde a besoin d'une » petite correction, que l'auteur aurait sans doute faite lui- » même, s'il eût pu revoir son Mémoire, et que Cramer, » éditeur de ses œuvres, a indiquée : au moyen de cette » correction, on retrouve également l'équation de la » chaînette.

» Dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour » l'année 1712, La Hire, considérant le problème de la » poussée des voûtes, sous un point de vue indiqué par » quelques expériences, en donna une solution, qui, par » la simplicité du calcul et des résultats, fut saisie et adoptée » avidement par la plupart des praticiens, sans s'embarrasser » si elle était applicable à tous les cas qui peuvent arriver. » Il suppose que les voûtes dont les pieds-droits n'ont pas » une épaisseur suffisante pour en soutenir la poussée, se » fendait vers les reins à la hauteur d'environ 45 degrés au- » dessous des impostes : en conséquence il regarde la partie » supérieure de la voûte comme un coin qui tend à écarter » ou à renverser les pieds-droits, et il détermine, par la

» théorie du coin et du levier, les dimensions qu'ils doi-
» vent avoir pour résister à leur effort. On s'en est tenu
» pendant long-temps uniquement à cette méthode pour
» les voûtes *en berceau*; on l'a même appliquée aux voûtes
» en dôme, quoique les deux cas ne se ressemblent point,
» et qu'ils conduisent à des équations de degrés différens,
» comme on le verra par la suite.

» Couplet a donné en deux parties un Mémoire sur la
» poussée des voûtes en berceau; la première, imprimée
» dans le volume de l'Académie pour l'année 1729, traite
» de la poussée des voûtes et de l'épaisseur de leurs pieds-
» droits, en *considérant* les voussoirs comme infiniment
» polis, ou comme pouvant glisser les uns sur les autres,
» sans éprouver aucune résistance de la part du frottement;
» mais comme cette hypothèse n'est pas exactement con-
» forme à l'expérience, la seconde partie du Mémoire,
» imprimée dans le volume de l'Académie pour l'année
» 1730, a pour objet les mêmes questions, en sup-
» posant que les voussoirs n'ont pas la faculté de glis-
» ser, mais qu'ils peuvent se soulever et s'écarter les uns
» des autres par de petits mouvemens de rotation. Toute
» cette théorie est appliquée principalement aux voûtes
» circulaires. Couplet détermine la proportion des poids
» des voussoirs, et *la figure qu'*il faut donner à l'extrados
» relativement à l'intrados : il n'a d'ailleurs ajouté que très-
» peu de chose aux théories de La Hire et Parent; et aucun
» d'eux n'a traité le sujet avec la généralité et la précision
» nécessaires soit dans la théorie, soit dans la pratique.

« Le volume de l'Académie pour l'année 1734, contient
» un Mémoire de Bouguer sur *les lignes courbes*, *propres*
» *à former les voûtes en dôme*. L'auteur fait voir qu'on

» peut employer pour cela une infinité de lignes courbes,
» et en même temps il indique la manière de choisir les plus
» avantageuses. Il suppose toujours que les voussoirs ont
» leurs surfaces infiniment polies; il établit, d'après cette
» hypothèse, les conditions de l'équilibre dans chaque assise
» horizontale d'une voûte en dôme. On voit que ce pro-
» blème a de l'analogie avec celui de la chaînette retournée
» pour les voûtes en berceau. Bouguer n'a dailleurs donné
» aucune méthode pour déterminer la poussée des voûtes
» en dôme; il n'a point examiné la loi des forces qui doi-
» vent agir sur les voussoirs lorsque la courbe génératrice
» est assujétie à des conditions données; matière féconde
» en problèmes curieux et utiles.

» Tels sont les ouvrages, au moins ceux qui m'étaient
» connus, sur l'équilibre des voûtes, lorsqu'en 1770, comme
» les dates en font foi, je traitai la question dans toute sa
» généralité, tant pour les voûtes en berceau que pour les
» voûtes en dôme. J'examinai tout ce qui regarde la figure
» et la poussée de ces deux espèces de voûtes, dans deux
» mémoires imprimés parmi ceux de l'Académie des Scien-
» ces de Paris, pour les années 1774 et 1776. Ce travail fut
» entrepris à l'occasion du dôme de l'église de Sainte-Gene-
» viève (aujourd'hui *le Panthéon français*) commencée par
» le célèbre architecte Soufflot, et achevée sur ses dessins.
» Les piliers et les colonnes qui portent ce dôme ayant été
» regardés par quelques critiques, peu versés dans la mé-
» canique, comme insuffisans pour en soutenir la poussée,
» je fus engagé à chercher la vraie formule générale, alors
» inconnue, pour déterminer la poussée des voûtes en
» dôme, comme la Hire a déterminé celle des voûtes en
» berceau. L'application que je fis de ma formule au sujet
» en question, prouve que les piliers avaient une épaisseur

» suffisante pour résister au renversement ; aussi l'édifice » n'a-t-il éprouvé à cet égard aucun mouvement. Mais par » l'usage vicieux où l'on était alors de creuser le lit des » pierres vers l'intérieur, il est arrivé que le tassement, » occasionné par la charge supérieure du dôme, a fait » éclater les pierres vers les paremens, et que presque toutes » les colonnes ont éprouvé les funestes effets de ce tasse» ment. Soufflot, lui-même, qui en eut une crainte antici» pée, entreprit de faire des expériences pour déter» miner la résistance dont les pierres sont capables sans » s'écraser sous des pressions données. Il mourut en 1780, » avec la malheureuse certitude oculaire, que les piliers de » son dôme commençaient à se briser vers les bords. Sa ma» chine à écraser les pierres a été dans la suite fort perfec» tionnée par le cit. Rondelet, qui a fait un grand nombre » d'expériences sur la résistance des pierres de différentes » espèces et de différentes dimensions : il a déjà publié une » partie de ce travail dans son *Mémoire historique sur le* » *Panthéon français* (1793); il l'a continué avec succès, et » on en doit attendre les plus grands avantages pour la con» naissance de cette branche importante de l'architecture. » J'ajouterai ici qu'on a pris en dernier lieu des précautions » efficaces contre les progrès de l'affaissement du dôme du » Panthéon français.

» Le tome 7 des ouvrages présentés à l'Académie des » Sciences, contient, sous la date de l'année 1773, un beau » Mémoire du cit. Coulomb, aujourd'hui membre de l'Ins» titut national, sur quelques problèmes relatifs à l'archi» tecture. Parmi ces problèmes se trouve celui de l'équilibre » des voûtes en berceau, que l'auteur a traité par une mé» thode dirigée vers l'utilité-pratique.

» En 1785, le cit. Mascheroni fit imprimer à Bergame un » ouvrage intitulé : *Nuove Richerche sull' equilibrio delle » volte*, dans lequel il y a des propositions curieuses sur » l'équilibre des voûtes, principalement sur l'équilibre des » voûtes en dôme, à bases circulaires, elliptiques et poly- » gonales. L'auteur reconnaît lui-même que mes deux Mé- » moires ne lui ont pas été inutiles.

» Un grand nombre de nouvelles réflexions théoriques » et expérimentales que j'ai faites, depuis mes premiers » essais, sur toute cette matière, m'ont déterminé à la re- » prendre et à la traiter avec toute l'étendue nécessaire pour » rendre mes recherches utiles aux mécaniciens-géomètres. » J'ai d'ailleurs toujours suivi mes anciens principes : j'aurai » donc pu donner mes additions en forme de supplément à » mes deux Mémoires; mais cela aurait demandé une foule » de citations et de renvois, incompatibles avec la méthode » et la clarté, qui ne peuvent avoir lieu lorsque chaque » chose n'est pas à sa véritable place. J'ai préféré de refondre » entièrement mes deux Mémoires, et d'y incorporer les » additions, de telle manière que le tout forme maintenant » un ouvrage comme nouveau.

» Je considérerai séparément l'équilibre des voûtes en » berceau, et celui des voûtes en dôme. »

Après avoir fait connaître le travail de M. Bossut, il me resterait à donner un précis du mien. Un coup d'œil sur ma table sommaire suffit pour donner une idée du plan que j'ai adopté et des matières que j'ai traitées. Je n'ajouterai que quelques réflexions.

Dans le premier chapitre, j'expose les principes de l'équilibre entre les voussoirs d'une voûte en berceau, en supposant ces voussoirs soumis à deux espèces de forces et de plan

plan sans frottement. La solution de ce problème général que j'ai donnée dans le n° 4 est entièrement nouvelle : elle est simple et conduit à une équation différentielle qui dans les applications se prête à des intégrations faciles. J'ai considéré le sujet sous les différens points de vue qu'il présente, et j'ai appliqué mes formules aux courbes les plus usitées, ainsi qu'à d'autres qui pourraient être employées avantageusement.

Dans le chapitre 2, j'ai traité de la poussée des voûtes en berceau, problème qui ne saurait être résolu rigoureusement, à cause des données physiques qu'il faut considérer. Après avoir rapporté les hypothèses connues, j'ai fait voir l'inexactitude de celles de La Hire, à cause de l'incertitude du joint de rupture dont la position varie suivant la figure de la voûte. J'ai prouvé qu'on ne pouvait se dispenser de faire entrer dans le calcul les effets du frottement, et il en est résulté une théorie entièrement nouvelle, qui a l'avantage de bannir l'arbitraire dans la détermination du joint de rupture. C'est aux géomètres à juger le mérite de cette partie de mon travail, qui me paraît la plus importante.

Dans les chapitres 3 et 4, j'ai traité, pour les dômes à bases circulaires, les mêmes questions que j'avais examinées dans les deux premiers chapitres à l'égard des voûtes en berceau. J'ai fait remarquer une singularité assez frappante ; savoir, que la surface d'extrados doit se terminer à la clef par une flèche ou pyramide qui s'étend à l'infini, à moins que le rayon de courbure de l'intrados à la clef ne soit infini.

Dans le chapitre 5, j'ai traité des dômes à base régulière et polygonale, ainsi que de ceux dont les joints n'étant pas normaux, concourent en un même point.

Enfin, j'ai terminé mon Ouvrage par une appendice sur les anses de panier, espèces de courbes usitées dans la construction des ponts. Je ne connais aucun traité sur cette matière, qui cependant présente de l'intérêt.

J'ai examiné plusieurs questions que n'a point traitées M. Bossut, j'ai osé relever quelques inexactitudes qui ont échappé à ce savant géomètre. Mon estime pour son nom et mon respect pour son grand âge, ont dû céder aux devoirs impérieux que commandent l'intérêt de la science et l'amour de la vérité. J'ai d'ailleurs pensé que l'importance du sujet, aussi bien que l'intérêt des architectes et ingénieurs, exigeaient que la matière fût plus développée, ce qui m'a déterminé à l'étendre dans un cadre, environ quatre fois plus grand. Je ne prétends pas cependant avoir épuisé une matière qui est très-féconde; mais ce que j'en ai dit peut suffire aux architectes-géomètres pour les guider dans tous les cas qui peuvent se présenter. C'est pour eux uniquement que mon livre est destiné, parce que les bonnes méthodes de construction, fondées sur des théories rigoureuses, ne peuvent devenir communes qu'après avoir été adoptées par les ingénieurs instruits : je m'estimerai heureux si mon travail a pu mériter leur suffrage.

Déjà plusieurs savans géomètres, MM. Deprony, Lacroix, Puissant, etc., ont bien voulu s'expliquer avantageusement sur ma Statique des Voûtes: on me permettra de rapporter ici la lettre écrite à ce sujet par M. Deprony à M. Houdouard. Le suffrage honorable qu'elle renferme me fait espérer que mes efforts n'auront pas été tout-à-fait inutiles au progrès de la science.

Paris, le 15 janvier 1809.

L'Inspecteur général, Directeur de l'École impériale des Ponts et Chaussées, membre de l'Institut des sciences, lettres et arts de France, et de la Légion d'honneur, à M. Houdouard, *membre du Corps législatif, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.*

Je vous remercie, Monsieur et cher Camarade, de la communication que vous avez bien voulu me donner du Traité manuscrit de l'équilibre des voûtes, *de M. Berard; j'ai parcouru, avec grand plaisir, cet ouvrage pendant le peu de momens que me laissent mes occupations multipliées, et je pense que les Ingénieurs qui ont du goût pour les belles études rationnelles, applicables à la pratique de leur art, le liront avec beaucoup d'intérêt. Cet intérêt, dû à l'ouvrage, est singulièrement augmenté par celui qu'inspire l'Auteur, à qui je vous prie de dire, en lui faisant, de ma part, mille complimens, que je répondrai très-prochainement à la lettre qu'il m'a fait l'amitié de m'écrire.*

Agréez, Monsieur et cher Camarade, l'assurance de ma parfaite estime et de mon sincère attachement.

DEPRONY.

TABLE SOMMAIRE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'équilibre entre les voussoirs d'une voûte en berceau.

SECTION PREMIÈRE.

SECTION II.

Applications pour construire l'extrados quand on connaît l'intrados.

SECTION III.

Applications. Trouver l'intrados quand on connaît la loi des forces ou l'extrados.

CHAPITRE II.

De la poussée des berceaux et de leur équilibre avec les pieds-droits.

SECTION PREMIÈRE.

Notions préliminaires.

SECTION II.

Différentes hypothèses sur la poussée.

SECTION III.

Essai d'une théorie nouvelle et plus rigoureuse de la poussée en ayant égard au frottement.

SECTION IV.

Applications à différentes espèces de voûtes.

SECTION V.

Du pied-droit d'égale résistance et du minimum *des matériaux.*

CHAPITRE III.

De l'équilibre entre les voussoirs des voûtes en dôme à base circulaire.

SECTION PREMIÈRE.

SECTION II.

Applications.

CHAPITRE IV.

De l'équilibre entre les dômes à base circulaire, et les tambours qui les supportent.

SECTION PREMIÈRE.

Équations d'équilibre entre le dôme et le tambour.

SECTION II.

Applications.

SECTION III.

Du tambour d'égale résistance et du minimum des matériaux.

CHAPITRE V.

Des voûtes irrégulières, ou dont les joints ne sont pas normaux à l'intrados.

SECTION PREMIÈRE.

Des voûtes dont les joints concourent en un même point.

SECTION II.

Des voûtes à base régulière et symétrique.

APPENDICE.

FIN DE LA TABLE.

THÉORIE

DE

L'ÉQUILIBRE DES VOÛTES.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'ÉQUILIBRE ENTRE LES VOUSSOIRS D'UNE VOÛTE EN BERCEAU.

SECTION PREMIÈRE.

Problème général.

ÉTANT donné l'intrados, trouver l'extrados, et réciproquement: ou bien, étant donné l'intrados, trouver la loi des forces, et réciproquement.

1. On sait qu'on appelle *voûte* une surface courbe en pierres, qui recouvre une base de figure quelconque. Si cette surface est engendrée par le mouvement d'une ligne courbe parallèlement à elle-même, la voûte est dite *en berceau*. Si la voûte est engendrée

par la révolution d'une courbe tournant autour d'un axe vertical, elle prend le nom de *dôme à base circulaire*, etc.

Les pierres dont est composée la voûte sont des espèces de coins ou de pyramides tronquées, appliquées les unes contre les autres; on les nomme *voussoirs*, et les faces par lesquelles ils se touchent s'appellent *joints*. Les joints doivent, tant pour la grace que pour la solidité de la construction, être perpendiculaires à la surface intérieure de la voûte, qu'on appelle *intrados;* la surface extérieure est nommée *extrados*.

On sent que chaque voussoir fait un effort pour écarter ceux qui le touchent: cet effort est variable pour chacun, et dépend de sa position. La voûte la plus parfaite serait celle où les efforts des différens voussoirs seraient tellement combinés, qu'en les supposant polis et sans frottement, tous ces efforts se détruiraient mutuellement; car alors il y aurait équilibre entre les diverses parties de la voûte: il ne resterait plus qu'à donner aux murs ou pieds-droits qui supportent la voûte, l'épaisseur suffisante pour résister à la poussée, c'est-à-dire à l'effort de la voûte pour renverser les pieds-droits.

C'est dans ce problème général que consiste la théorie de l'équilibre des voûtes. Il est rare que les Architectes se conforment aux principes de la Statique, et si l'on ne voit pas toutes les voûtes s'écrouler après qu'on a enlevé le cintre, c'est uniquement le frottement et la liaison du mortier qui préviennent cet accident.

Nous examinerons d'abord les conditions de l'équilibre entre les voussoirs des voûtes en berceau: nous déterminerons ensuite la poussée et l'épaisseur des pieds droits; puis nous passerons aux voûtes en dôme, en suivant le même ordre que pour celles en berceau.

Les voussoirs peuvent être sollicités par des forces de différentes espèces: nous examinerons ce problème général dans un autre article. Pour aller du simple au composé, nous commencerons par le cas le plus ordinaire, celui où les voussoirs ne sont soumis qu'à l'action de leur propre poids.

2. *Solution pour le cas où les voussoirs ne sont soumis qu'à l'action de la pesanteur.* EFF'E', EFMN, E'F'M'N', (fig. 1) sont trois coins

pesans, sans frottement; les deux derniers reposent sur les deux plans inclinés et symétriquement placés MN, M'N', et le premier repose entre les deux autres : on demande l'équation d'équilibre entre ces trois coins.

Soit 2M le poids du coin EFF'E', N celui de chacun des deux autres; ε l'angle aigu NRV formé par le joint NM avec la verticale VR; α l'angle aigu formé par le joint EF avec la verticale. Soit VT une perpendiculaire élevée sur le milieu de EF, V le point où elle rencontre la verticale passant par le centre de gravité du coin V, et T le point où elle rencontre la montée prolongée ou la verticale passant par la clef.

Le poids du coin intermédiaire, ou la force 2M, peut être supposée appliquée au point T de sa direction, et décomposée en deux autres égales TK, TK' : de même la force N peut être supposée agir au point V de sa direction, et décomposée en deux autres, l'une VI, perpendiculaire au plan MN et détruite par ce plan, l'autre Vh, directement opposée à la force TK. Il faudra donc, pour l'équilibre, qu'on ait $TK = Vh$: cherchons l'expression de ces deux lignes.

Si la force 2M est représentée par Tt, et si on mène l'horizontale Kg, on verra aisément qu'on a $TK = tK$; $Tg = M$; $KTt = KtT = 90° - \alpha$; $tKg = \alpha$; d'où l'on tire $TK = \frac{M}{\sin\alpha}$. On trouvera de même, que dans le triangle Vvh, on a (en faisant $Vv = N$) $Vvh = 90° - \varepsilon$; $vVh = 90° + \alpha$; $vhV = \varepsilon - \alpha$; d'où l'on tire $Vh = \frac{N\cos\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \alpha)}$. L'équation d'équilibre devient $\frac{N\cos\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \alpha)} = \frac{M}{\sin\alpha}$, d'où il est aisé de tirer $M \tang \varepsilon = (M + N) \tang \alpha$.......(1).

Si, au lieu de chercher l'équilibre entre trois coins, nous eussions regardé la montée TO comme un plan inébranlable, et cherché l'équation d'équilibre entre les deux coins SSTE, EFMN, retenus entre les plans SS' et MN, il est évident que nous serions arrivés à la même équation (1). Cette équation exprime donc la relation qui doit toujours exister entre les masses M, N de deux portions de voûte SSTE, EFMN, et les angles α et ε, quelles que soient d'ailleurs les figures de l'extrados et de l'intrados, du moins tant que la voûte n'est soumise qu'à la force de la pesanteur.

Comme rien jusqu'ici ne détermine la grandeur du coin EFNM, on peut supposer que l'autre SS'FE demeurant le même, N devienne $N+\Delta N$, et $\operatorname{tang}\varepsilon$ devienne $\operatorname{tang}\varepsilon+\Delta\operatorname{tang}\varepsilon$. Alors l'équation (1) se change en

$$M(\operatorname{tang}\varepsilon+\Delta\operatorname{tang}\varepsilon)=(M+N+\Delta N)\operatorname{tang}\alpha\,;$$

de laquelle retranchant l'équation (1) on tirera

$$\Delta N=\frac{M\,.\,\Delta(\operatorname{tang}\varepsilon)}{\operatorname{tang}\alpha}\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(2).$$

Cette équation (2) exprime la relation entre la masse ΔN d'un voussoir quelconque, et l'incrément ou accroissement fini $\Delta(\operatorname{tang}\varepsilon)$, qui est donné par l'angle que forment les deux joints qui terminent ce voussoir. Si la matière de la voûte est homogène, on pourra prendre pour M et N les aires au lieu des poids. L'équation (2) peut servir à déterminer par points, soit l'extrados, soit l'intrados, quand on connaît l'un des deux. Mais nous exposerons plus bas un moyen plus commode, qui consiste à calculer la longueur de chaque joint.

Après avoir considéré une suite de coins ou voussoirs d'une grandeur finie, il faut passer au cas où ces voussoirs étant infiniment petits, la suite des joints forme une courbe d'intrados et une courbe d'extrados. Soit (fig. 2) MN un joint quelconque faisant avec la verticale un angle ε; *mn*, un autre joint infiniment proche; $SP=x$, $PM=y$, les coordonnées du point M. En imaginant un autre joint fixe EF et désignant par M la masse du coin SS'FE, par N celle du coin variable EFMN, et par α l'angle formé par le joint EF, on aura $\operatorname{tang}\varepsilon=\frac{dx}{dy}$: l'équation (1) deviendra

$$M\frac{dx}{dy}=(M+N)\operatorname{tang}\alpha\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(3):$$

ce sera l'équation de l'intrados, en observant que N est une fonction de x, y, qui doit être donnée, soit par la position de l'extrados, s'il est connu, soit par toute autre condition de la question.

On peut trouver encore une équation plus simple pour caractériser l'état d'équilibre. Si le voussoir N est très-petit, ce qu'il faut

supposer pour passer du polygone à la courbe, on a $N = dM$ et $\tang \varepsilon = \tang \alpha + d.\tang \alpha$: faisant ces substitutions dans l'équation (1), elle devient

$$\frac{M}{\tang \alpha} = \frac{dM}{d.\tang \alpha}\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

propriété très-remarquable. Cette dernière équation étant écrite ainsi : $\frac{dM}{M} = \frac{d.\tang \alpha}{\tang \alpha}$, et intégrée, donne $\log M = \log \tang \alpha + \log c$; d'où

$$\frac{M}{\tang \alpha} = c\ldots\ldots\ldots(5).$$

Cette équation fournit cette autre propriété remarquable, savoir, que l'espace M compris entre l'intrados et l'extrados est toujours *quarrable puisqu'il est égal à* $c \tang \alpha$, et que le rapport de cette aire à la tangente de l'angle correspondant α est invariable. Ces propriétés nous seront utiles par la suite. Nous ferons voir que la quantité $\frac{M}{\tang \alpha}$ exprime la poussée horizontale de la demi-voûte.

Il reste à trouver la longueur d'un joint de lit quelconque. En conservant les notations du n° précédent, et nommant de plus l'arc $SM = s$, R le rayon de courbure MI du point M de l'intrados, et K la grandeur cherchée du joint MN, on aura l'angle $MIm = d\varepsilon$; $Mm = ds = Rd\varepsilon$ (en appelant 1 le rayon des tables); l'arc NL décrit du point I comme centre $(R + K)d\varepsilon$.

En remarquant que le triangle NnL est infiniment petit du second ordre, on trouvera que la surface du petit voussoir $MNnm$ est $Kd\varepsilon(R + \frac{1}{2}K)$. Mais l'équation (2) donne $dN = M\frac{d(\tang \varepsilon)}{\tang \alpha} = \frac{Md\varepsilon}{\tang \alpha.\cos^2 \varepsilon}$: or dN est aussi l'aire du petit voussoir $MNnm$. Égalant les deux expressions de cette aire, et résolvant l'équation qui en résulte, on en tire $K = -R + \sqrt{\frac{2M}{\tang \alpha.\cos^2 \varepsilon} + R^2}$, ou en mettant pour $\cos^2 \varepsilon$ sa valeur $\frac{dy^2}{ds^2}$, et remplaçant par la lettre c la quantité constante $\frac{2M}{\tang \alpha}\ldots\ldots K = -R + \sqrt{\frac{cds^2}{dy^2} + R^2}$.

On peut dès à présent déterminer la constante c, en observant qu'à la clef, on a $ds = dy$, et qu'en appelant k l'épaisseur SS' de

la voûte en ce point, on doit avoir aussi $K=k$. Soit donc r ce que devient R à la clef, on trouvera $C=k^2+2rk$, et l'on aura finalement

$$K=-R+\sqrt{(k^2+2rk)\frac{ds^2}{dy^2}+R^2}\ldots\ldots\ldots(6).$$

Cette équation (6) fournit le moyen le plus simple de construire l'extrados quand on connaît l'intrados.

On peut avoir besoin de connaître la nature de l'une des deux courbes d'intrados ou d'extrados, quand on connaît l'autre : je vais chercher les relations qui existent entre les coordonnées de l'une et celles de l'autre.

3. *Relations entre les coordonnées de l'intrados et celles de l'extrados.* Soit (fig. 3) $SQ=x'$ et $QN=y'$, deux coordonnées rectangulaires de l'extrados. Ayant mené la verticale MH, on aura $MH=x-x'$; $HN=y'-y$; $MN=K$. En comparant le triangle MNH avec le triangle infiniment petit formé par dx, dy, ds qui lui est semblable, on trouvera aisément les deux équations suivantes : $y'-y=\frac{Kdx}{ds}$, $x-x'=\frac{Kdy}{ds}$.

Éliminant K entre ces deux équations et l'équation (6), on aura les deux suivantes :

$$(y'-y)dy-(x-x')dx=0\ldots\ldots\ldots\ldots(7),$$

$$(y'-y)\frac{ds}{dx}=-R+\sqrt{\frac{ds^2}{dy^2}(k^2+2rk)+R^2}\ldots(8).$$

Par le moyen de l'équation de l'intrados, $y=f(x)$, on fera disparaître des équations (7) et (8), dy, dx, ds et R, ainsi que y : on aura alors deux équations entre x, x', y', desquelles éliminant x, il viendra l'équation cherchée de l'extrados entre x' et y', il est évident que le problème sera toujours possible.

Si au contraire on connaît l'extrados et qu'on demande l'intrados, il faudra éliminer x' et y' des deux équations ci-dessus et de $y'=f(x')$: il viendra une équation différentielle du second ordre entre x et y, qu'il faudra intégrer deux fois : on aura deux constantes nouvelles c' et c'', outre c qu'il faut remettre dans l'équa-

tion (8) à la place de k^2+2rk. On déterminera ces trois constantes par les conditions, 1°. qu'on ait $x=0$, quand $y=0$; 2°. qu'on ait $\frac{dx}{dy}=0$, quand $x=0$; 3°. $x=a$, quand $y=b$. On voit que le second problème est toujours plus difficile que le premier, et permet de remplir certaines conditions; tandis que le premier est déterminé et algébrique.

4. *Solution plus générale.* Dans les articles précédens, les voussoirs n'étaient soumis qu'à la seule action de leur propre poids. Les formules que nous avons trouvées suffisent pour déterminer l'intrados par l'extrados, et réciproquement.

Mais les voussoirs peuvent être soumis à d'autres forces que celles de la pesanteur. Nous allons résoudre le problème général, en supposant les voussoirs soumis à deux espèces de forces, les unes normales, les autres verticales, et toutes deux variables pour chaque point de l'intrados. On peut ramener à ce cas tous les autres.

Première solution. Quelles que soient la grandeur et la direction des forces qui agissent sur la voûte, on peut toujours la concevoir composée de trois coins EFNM, E'F'N'M', EFE'F' (fig. 4), dont les deux premiers sont égaux et symétriquement placés. L'équilibre devra avoir lieu non-seulement entre ces trois coins, mais encore entre les parties ou voussoirs qui composent chaque coin: de plus, l'équilibre devra encore subsister, si on fait varier de grandeur le coin du milieu et les deux adjacens, ou seulement les deux coins extrêmes par la variation des plans MN, M'N' le coin EFE'F' restant le même. Nous allons employer ce dernier principe, comme étant plus simple.

Soit α l'angle formé par la verticale avec le joint fixe EF, ε celui que fait la même verticale avec le joint MN variable de position, P la force normale et variable qui presse chaque point de l'intrados, et Q la force verticale et variable de grandeur seulement qui agit sur le même point. Quelles que soient les grandeurs et les directions des forces P et Q qui agissent sur le coin intermédiaire EF', leur résultante, que j'appelle 2M, sera nécessairement verticale et passera par la clef.

Si on élève sur le milieu de EF, une perpendiculaire qui ren-

contre en T la montée prolongée, et qu'on décompose la force $2M = Tt$ en deux autres TK, TK', il faudra que ces deux forces soient détruites par celles qui agissent sur les deux coins sur lesquels repose celui du milieu.

Soit Vv la résultante de toutes les forces qui agissent sur le coin MNFE, et V le point où elle est rencontrée par TV : si on la décompose en deux autres, l'une VI perpendiculaire au plan MN, par lequel elle sera détruite, et l'autre VH, il faudra, pour l'équilibre, qu'on ait $VH = TK$.

Nous avons vu, article 2, qu'on a $TK = \frac{M}{\sin\alpha}$: reste à trouver l'expression de VH.

Je décompose la force normale P qui agit sur chaque point de l'élément ds de l'arc EM, et qui est Pds, en deux, l'une horizontale, qu'on verra être $Pds\frac{dx}{ds}$ ou Pdx; l'autre verticale, qui sera Pdy. La somme des premières qui agissent sur l'arc fini ME est $\int Pdx$; celle des secondes est $\int Pdy$; ces intégrales étant censées prises depuis le point E jusqu'au point M.

Quant aux forces Q, leur résultante pour l'arc ME sera $\int Qds$.

Puisque nous avons représenté par Vv la résultante unique des trois groupes de forces ci-dessus, si on construit un parallélogramme sur cette ligne, comme diagonale, et dont les côtés soient l'un horizontal, l'autre vertical, on aura $Vx = \int Pdx$ et $Vr = \int Pdy + \int Qds$.

Soit prolongée Vr jusqu'en f, on aura les angles $VIf = \varepsilon - \alpha$; $IVf = 90° - \varepsilon$; $rfv = 90° - \alpha$; $fvr = \alpha$; on trouvera $fv = \frac{rv}{\cos\alpha}$; $rf = \text{tang}\,\alpha . rv$; $If = \frac{Vf\cos\varepsilon}{\sin(\varepsilon - \alpha)}$; d'où l'on conclut aisément

$$VH = \frac{\cos\varepsilon\,(\int Pdy + \int Qds + \text{tang}\,\alpha \int Pdx)}{\sin(\varepsilon - \alpha)} + \frac{\int Pdx}{\cos\alpha} = \frac{M}{\sin\alpha}.$$

Telle est l'équation d'équilibre qui, par de simples transformations, se met d'abord sous la forme suivante :

$$\frac{M}{\sin\alpha}(\cos\alpha\,\text{tang}\,\varepsilon - \sin\alpha) = \int Pdy + \int Qds + \text{tang}\,\varepsilon \int Pdx.$$

Pour

Pour faire disparaître le signe $\int$, et éviter l'indétermination du point E, d'où se comptent les intégrales, il faut différentier deux fois de suite l'équation ci-dessus, en se rappelant que M et α sont constans. Mettant ensuite pour tang ϵ sa valeur $\frac{dx}{dy}$, on arrive à l'équation $d\left(\frac{Pds^2}{dyd\left(\frac{dx}{dy}\right)}\right)+d\left(\frac{Qds}{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}\right)+Pdx=0$, à laquelle on donne la forme suivante, plus commode, en y introduisant le rayon de courbure $R=\frac{ds^3}{dy^2d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$,

$$d\left(PR\frac{dy}{ds}\right)+d\left(\frac{QRdy^2}{ds^2}\right)+Pdx=0\ldots\ldots\ldots(9).$$

Pour faire usage de l'équation (9), il faudra y substituer pour P et Q leurs valeurs données par la nature de la question, et pour R une des valeurs suivantes, que l'on choisira de manière à avoir l'intégration la plus simple, savoir, $R=\frac{ds^3}{-dxd^2y}$; $R=\frac{ds^3}{-dx^2.d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$; $R=\frac{ds^3}{dy^2.d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$; $R=\frac{ds^3}{dyd^2x}$; $R=\frac{dxds}{-d^2y}=\frac{dyds}{d^2x}$, suivant qu'on a fait constant dx, ou dy, ou ds.

5. On trouverait une autre solution, en suivant une autre marche. On pourrait chercher l'équation d'équilibre, en considérant le voussoir du milieu comme étant d'une grandeur finie, mais variable et terminé par les coordonnées x et y, et regardant les voussoirs voisins comme infiniment petits, α serait variable et l'on aurait $\epsilon=\alpha+d\alpha$; $Vx=Pdx$; $Vr=Pdy+Qds$. Les forces $\int Pdx$ se détruiraient pour les deux moitiés du voussoir du milieu; l'on aurait $Tt=2\int Pdy+2\int Qds$: en se conduisant comme dans la première solution, faisant attention que $\cos d\alpha=1$; $\sin d\alpha=d\alpha$, et rejetant les différentielles des ordres supérieurs, on trouve l'équation suivante :

$$d\left(PR\frac{dx}{ds}\right)+d\left(QR\frac{dxdy}{ds^2}\right)=Pdy+Qds\ldots\ldots\ldots(10).$$

Cette équation est plus composée que l'équation (9), sans être plus générale : elle donne les mêmes intégrales dans les applications.

6. *Troisième solution.* En considérant la courbe cherchée comme un polygone d'une infinité de côtés, on en prend trois consécutifs, *ab*, *bc*, *cd* (fig. 5 et 6), et supposant les forces appliquées aux angles, on décomposera celles qui sont appliquées à un même angle, chacune en deux autres dirigées suivant les deux côtés de cet angle : alors la condition générale de l'équilibre, est que pour chaque côté intermédiaire, tel que *bc* (fig. 5), la somme des forces qui agissent de *b* vers *c* soit égale à la somme de celles qui agissent de *c* vers *b*.

Cela est fondé sur ce qu'en supposant trois voussoirs quelconques renfermés entre deux plans immobiles, ils doivent encore être en équilibre par l'effet des forces qui leur sont appliquées.

Ici les forces P appliquées aux angles *b* et *c* partagent ces angles en deux parties égales, et les forces Q sont parallèles à l'axe des x. La force normale qui agit au point *b* sur tous les points de l'élément ds, est Pds : la force verticale est Qds. Ces forces seront, pour le point *c*, $ds(P+dP)$ et $ds(Q+dQ)$, en supposant ds constant.

Nommons $Sq=x$; $qa=y$; $ab=ds$; $bf=Pds$. Décomposons la force bf en deux autres, suivant les côtés du polygone. L'angle de contingence *abc* formé par les côtés du polygone sera exprimé par $\frac{ds}{R}$ en appelant R le rayon de courbure. Donc l'angle de contingence bcz' sera $\frac{ds}{R+dR}$.

Cela posé, en se rappelant que la résultante et les deux composantes sont représentées en grandeur, chacune par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres, on aura $\sin gbc$, où $\sin abc : \sin fbg :: Pds : be$; donc en faisant attention que l'angle fbg est droit, on a $\frac{ds}{R} : 1 :: Pds : be = PR$. Par une décomposition et un raisonnement semblables pour le point *c*, on trouvera $CK = (P+dP)(R+dR)$.

Décomposons pareillement les forces Q ou bk (fig. 6.) [pour

éviter la confusion dans la figure (5)] en deux autres dirigées suivant les côtés du polygone. Nous aurons $\sin ibl'$ ou $\sin abz$, ou $\sin bik : \sin kbl$ ou $\sin aby :: Qds : bi$, ou $\frac{ds}{R} : \frac{dy}{ds} :: Qds : bi = \frac{QRdy}{ds}$.

On trouvera de même pour le point c, $\sin mcb : \sin mcn$, ou $\sin z'cy'$, ou $\sin(bcy' - bcz') :: ds(Q+dQ) : co$. Or

$\sin(bcy'-bcz') = \sin bcy' \cos bcz' - \sin bcz' \cos bcy' = \frac{dy+d^2y}{ds} - \frac{dx+d^2x}{R+dR}$

(parce que le cosinus de bcz' est censé égal au rayon) : donc

$$co = \frac{(Q+dQ)(R+dR)(dy+d^2y)}{ds} - (Q+dQ)(dx+d^2x).$$

Substituant dans l'équation d'équilibre $be+bi=ck+co$ les valeurs de ces forces, on a

$$PR+\frac{QRdy}{ds} = (P+dP)(R+dR) + \frac{(Q+dQ)(R+dR)(dy+d^2y)}{ds} - (Q+dQ)(dx+d^2x),$$

équation qui n'est autre chose que celle-ci, en rejetant comme il convient les différentielles des ordres supérieurs,

$$d(PR) + d\left(\frac{QRdy}{ds}\right) - Qdx = 0 \ldots\ldots\ldots (11).$$

Cette dernière équation revient au même, et donne les mêmes résultats que l'équation (9) de la première solution, quoiqu'elles se présentent sous des formes différentes. Cette différence tient à la manière dont les forces ont été décomposées. L'équation de la première solution devra être préférée comme donnant des intégrales plus commodes, lorsque les forces P seront nulles : ce sera le contraire quand les forces Q seront nulles, et l'équation (11) sera préférable.

7. *Relation entre la grandeur du joint et le poids qui presse l'intrados.* Quand on connaît l'intrados, et qu'on demande l'extrados, on peut toujours le tracer, comme nous avons vu par l'équation (6) du n° 2, s'il n'y a que des forces verticales, et c'est toujours le moyen le plus simple. Cependant, on peut avoir besoin de connaître la loi des forces Q qui agissent sur chaque point de l'intrados, lesquelles sont proportionnelles aux aires des voussoirs, et non pas

aux grandeurs K des joints : il est donc à propos de chercher la relation entre K et Q.

Dans l'équation (9) du n° 4, la quantité Q exprime le poids qui presse chaque point du petit arc ds de l'intrados: le poids qui presse cet arc est donc Qds; mais ce poids n'est autre chose que celui du voussoir lui-même, ou de son aire ; or l'expression de cette aire est (n° 2) $\frac{Kds}{2R}(2R+K)$: on en conclut

$$\frac{K}{2R}(2R+K)=Q\ldots\ldots\ldots(12).$$

Au moyen de cette équation, lorsqu'on connaîtra le rayon R de courbure de l'intrados, pour un point quelconque de la courbe, et l'une des deux quantités K ou Q, on trouvera l'autre.

8. Nous avons déjà dit que l'aire de toute voûte équilibrée est quarrable. L'équation (9) du n° 4 fournit une expression simple de cette aire. En effet quand les forces P sont nulles, cette équation (9) se réduit à un seul terme, et intégrant elle devient $\frac{QRdy^2}{ds^2}=C'\ldots(a)$. Pour déterminer la constante C', il faut remarquer qu'à la clef on a $dy=ds$; $R=r$; $Q=q$, et que l'équation (12) donne $q=\frac{k}{2r}(2r+k)$; d'où l'on conclut $C'=\frac{1}{2}k(2r+k)$. Substituant cette valeur de C', et pour R sa valeur $\frac{ds^3}{dy^2.d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$ dans l'équation (a), elle devient $Qds=\frac{1}{2}k(2r+k)d\frac{dx}{dy}$, et intégrant on a

$$\int Qds=\text{aire}=M=\frac{1}{2}k(2r+k)\frac{dx}{dy}\ldots\ldots\ldots\ldots(13),$$

intégrale qui n'exige pas de nouvelle constante.

L'équation $\frac{M}{\text{tang}\,\alpha}=C$ trouvée dans le n° 2, aurait conduit au même résultat.

SECTION II.

Applications pour construire l'extrados quand on connaît l'intrados.

9. *L'intrados étant elliptique, trouver l'extrados.*

Soit pour intrados une ellipse surhaussée (fig. 7), et surabaissée (fig. 8), dont la montée est a, et la demi-base b; son équation sera, dans les deux cas, $y=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$: on trouvera

$$R=\frac{1}{a^4b}\{a^4(2ax-x^2)+b^2(a-x)^2\}^{\frac{3}{2}};\quad r=\frac{b^2}{a};$$

$$\frac{ds^2}{dy^2}=1-\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^4}{b^2(a-x)^2}.$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$K=-R+\sqrt{(k^2+2rk)\frac{ds^2}{dy^2}+R^2},$$

feront connaître K, et serviront à construire par points l'extrados. On observera que l'épaisseur K de la voûte va en augmentant depuis la clef jusqu'aux naissances où elle est infinie. A la rigueur, et abstraction faite du frottement, on voit qu'il ne serait pas possible de mettre le voussoir des naissances en équilibre avec les autres. Dans la pratique, le frottement s'oppose au glissement de ce dernier voussoir.

10. *L'intrados étant circulaire, trouver l'extrados.* Il suffit de faire $b=a$ dans les expressions du n° précédent, et l'on trouvera

$$K=-a+a\sqrt{\frac{k^2+2ak}{(a-x)^2}+1}.$$

On tire de cette expression une construction simple que voici :

Menez (fig. 3) les horizontales S*s*, S′*s*′; et ayant décrit un demi-cercle sur R*s*′ comme diamètre, portez S*s* de *s*′ en N′, puis faites RN = RN′; le point N appartiendra à la courbe de l'extrados. On répétera la même opération pour chaque voussoir.

Si l'on veut connaître la nature de la courbe d'extrados rapportée à des coordonnées rectangulaires x' et y', comme dans le n° 3, on aura ici pour $y=f(x)$, l'équation $y=\sqrt{2ax-x^2}$, et en se conduisant comme il est prescrit dans le numéro cité, on trouvera l'équation suivante :

$$y'^2=\frac{a^2(a-x')^{2'}}{(a-x')^2-k^2-2ak}-(a-x')^2.$$

Il faut remarquer ici, comme dans le n° précédent, que la grandeur K des joints va sans cesse en augmentant depuis la clef, ce qui explique pourquoi les berceaux cylindriques d'épaisseur égale se rompent ordinairement vers les reins. On doit en conclure que dans la construction on ne doit pas négliger de fortifier ces berceaux depuis le voussoir, de 45° environ jusqu'aux naissances.

11. *L'intrados étant parabolique, construire l'extrados.*

Soit l'intrados une parabole dont l'équation est $y^2=px$: on aura

$$\frac{ds^2}{dy^2}=\frac{4y^2+p^2}{p^2};\quad \mathrm{R}=\frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (6), et faisant attention qu'on a ici $r=\frac{1}{2}p$, on trouvera

$$\mathrm{K}=-\frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}+\frac{(4x+p)^{\frac{1}{2}}}{2p^{\frac{1}{2}}}\{4k(k+p)+(4x+p)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons que, dans le cas présent, K va en diminuant sans cesse depuis la clef jusqu'aux impostes, tandis que c'est le contraire lorsque l'intrados est un demi-cercle.

Si nous avions cherché la relation entre x' et y', nous serions arrivés à une équation très-compliquée du quatrième degré. La figure 9 représente la voûte dont nous venons de trouver l'extrados.

M. Bossut (*Dynamique, Équilibre des Voûtes*), a donné à sa figure analogue plus d'épaisseur aux naissances qu'à la clef, tandis que ce devrait être le contraire. L'architecte du Panthéon français a commis la même erreur.

12. Voyons maintenant comment les équations (9 et 11) servent à trouver la loi des forces ou la loi des poids des voussoirs, quand on connaît la nature de l'intrados.

Supposons, par exemple, que les voussoirs ne soient soumis qu'à l'action de leur propre poids. Je fais $P = 0$ dans l'équation (9), et intégrant, il vient $Q = \frac{c\,ds^2}{R\,dy^2}$. Pour déterminer C, supposons qu'à la clef où $ds = dy$, on ait $Q = q$, $R = r$, l'équation ci-dessus donnera $C = qr$, et l'on aura $Q = \frac{qr\,ds^2}{R\,dy^2} = \frac{qr}{ds}\,d\left(\frac{dx}{dy}\right)$; équation qui donnera la grandeur de la force Q qui sollicite chaque point de l'intrados, en y mettant pour $\frac{1}{ds}\,d\left(\frac{dx}{dy}\right)$ sa valeur donnée par l'équation de l'intrados.

Si, par exemple, l'intrados est une demi-ellipse dont *a* soit la montée et *b* la demi-base, on trouvera $Q = \frac{qb^4}{(b^2 - y^2)\sqrt{b^4 - b^2y^2 + a^2y^2}}$. Cette expression fait voir que les forces Q doivent augmenter depuis la clef jusqu'aux naissances où elles sont infinies.

Supposons actuellement les forces $Q = 0$; l'équation (11) étant intégrée donne tout de suite $P = \frac{C}{R}$, et en déterminant C comme ci-dessus, on a $P = \frac{pr}{R}$ (*p* et *r* étant les valeurs de P et R à la clef) : ce résultat fait voir que les forces normales P doivent être en raison inverse des rayons de courbure. Dans le cas de l'ellipse ci-dessus, on trouve $P = \frac{pb^6}{(b^4 + a^2y^2 - b^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$; d'où l'on conclut que la pression à la clef est à celle des naissances comme a^3 est à b^3, et que dans le cercle elle doit être constante, résultat qui était connu.

SECTION III.

APPLICATION. *Trouver l'intrados quand on connaît la loi des forces ou l'extrados.*

13. Le problème de la section précédente est toujours algébrique et possible, quand même on n'aurait que l'équation différentielle

du premier ordre de l'intrados. Il n'en est pas de même du problème inverse qui fait l'objet de la présente section : sa solution exige toujours trois intégrations, comme on va le voir dans les exemples qui suivent.

Je vais chercher quelle est la courbe d'intrados quand l'épaisseur k de la voûte est infiniment petite. Alors on a $M = s$, et l'équation $M = C$ tang α du n° 2, en y mettant $\frac{dx}{dy}$ pour tang α, devient $Sdy = cdx$: c'est là l'équation de la courbe cherchée, qu'il ne s'agit plus que d'intégrer.

On peut la trouver encore très-simplement d'une autre manière. Supposer que le poids M est proportionnel à l'arc S, c'est la même chose que de faire constante la force Q qui presse chaque point de l'intrados. Si donc on fait $P = 0$, $Q = 1$ dans l'équation (9) du n° 4, et qu'on intègre, on aura $\frac{Rdy^2}{ds^2} = C$, qui, en y mettant pour R sa valeur $\frac{ds^3}{dy^2 . d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$, devient $ds = C.d\left(\frac{dx}{dy}\right)$; et en intégrant, on a, comme ci-dessus,

$$sdy = cdx \ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

intégrale qui n'exige pas de nouvelle constante, parce qu'elle s'anéantit d'elle-même à la clef, où l'on a $s = 0$; $\frac{dx}{dy} = 0$.

Pour intégrer l'équation (a), j'y mets $\sqrt{ds^2 - dx^2}$ pour dy, et il vient $dx = \frac{sds}{\sqrt{s^2 + c^2}}$, dont l'intégrale est $R + C' = \sqrt{s^2 + c^2}$, ou $S = \sqrt{(x + c')^2 - c^2}$. Substituant cette valeur de S dans l'équation (a), il vient $dy = \frac{cdx}{\sqrt{(x + c')^2 - c^2}}$ dont on trouve que l'intégrale est

$$y = C'' - c \log \{x + C' - \sqrt{(x + c')^2 - c^2}\} \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

On détermine les trois constantes, en assujétissant la courbe à remplir trois conditions. Par exemple, si le point S doit être la clef, on doit avoir dans ce point $\frac{dx}{dy} = 0$ et $x = 0$; alors l'équation en dx et en dy donne $C = C'$. Si on veut ensuite que le point

point S soit l'origine des coordonnées, l'équation (14) devra donner $x = 0$ et $y = 0$, et on en tire $C' = C \log C$. Par ces substitutions, l'équation (14) devient

$$y = c \log \frac{c}{x + c - \sqrt{x^2 + 2cx}} = c \log \frac{x + c + \sqrt{x^2 + 2cx}}{c} \ldots\ldots\ldots (15)$$

Pour déterminer C, il faudra qu'en appelant a la montée et b la demi-base, l'équation (15) donne $y = b$ quand $x = a$: par là elle devient $b = c \log \frac{a + c + \sqrt{a^2 + 2ac}}{c}$; il faudra déterminer C par une espèce de tâtonnement.

Remarquons que l'équation (15) est celle d'une chaînette renversée, et que l'arc s est rectifiable, puisqu'on a $s = \sqrt{x^2 + 2cx}$.

Nous avons supposé que les deux impostes étaient à la même hauteur : si cela n'était pas, il suffirait d'imaginer la courbe prolongée du côté de l'imposte le plus bas. La clef serait toujours le point le plus élevé de la courbe, mais son axe se rapprocherait davantage de l'imposte le plus élevé. La détermination de C serait un peu différente, mais n'aurait rien de difficile.

A ne considérer que la solidité de la construction, la chaînette est sans contredit la courbe que l'on doit préférer pour les voûtes en berceau, puisque si les voussoirs y sont en équilibre, sans le secours du frottement et du ciment, cet équilibre s'affermira bien plus par le laps du temps. Il est vrai que, quelle que soit la courbe de l'intrados, on peut trouver, comme nous avons vu, un extrados qui procure aussi l'équilibre ; mais la chaînette a seule l'avantage, comme nous le verrons, de comporter une épaisseur uniforme, en prenant cette épaisseur moitié en dehors, moitié en dedans.

L'architecte non géomètre peut, en fixant contre un mur les extrémités d'une corde lâche et flexible, tracer l'épure de la voûte. Voici les moyens plus exacts que la Géométrie présente.

a étant toujours la montée et b la demi-base, on calculera d'abord la valeur de la constante C, soit par le tâtonnement d'après la dernière équation, soit au moyen de la série suivante

$$\frac{1}{C} = \frac{2a}{b^2} - \frac{2a^3}{3b^4} + \frac{26a^5}{45b^6} - \frac{622a^7}{945b^8}$$

que l'on obtient en mettant l'équation sous forme exponentielle ; réduisant en série les termes exponentiels, et déterminant C par la méthode du retour des suites.

Ayant trouvé C, on déterminera la longueur de la courbe par l'équation $SA = \sqrt{2ca + a^2}$ (fig. 10). Soit n le nombre des voussoirs, $\frac{SA}{n}$ sera l'arc de chacun d'eux. On fera successivement $s = \frac{SA}{n}$, $s = \frac{2SA}{n}$, $s = \frac{3SA}{n}$, etc. dans l'équation $x = -c + \sqrt{s^2 + c^2}$, et l'on aura les valeurs correspondantes de x, qui, étant substituées dans l'équation (15), donneront celles de y. Enfin, pour avoir la direction des joints, on calculera les valeurs correspondantes de chaque sous-normale PR ou z par l'équation

$$z = \frac{ydy}{dx} = \frac{cy}{s}.$$

J'ai placé ici une Table qui a pour objet d'épargner presque tous les calculs ; elle donne les valeurs de s, x, y, z, dans la supposition de $c = 25$. Imaginons qu'on ait tracé sur un carton la chaînette représentée par cette Table, en commençant par les valeurs de x et de y ; il suffira de prendre une portion plus ou moins grande de la courbe, pour avoir l'épure en petit de la voûte proposée.

Qu'on veuille, par exemple, faire une voûte dont la montée a soit de dix mètres, et la demi-base b de 8, on aura le modèle de cette voûte, en cherchant le point de la courbe pour lequel l'abscisse SP ou x est à l'ordonnée PM ou y dans le rapport de 10 à 8.

On verra facilement que cela a lieu dans la Table, lorsque $S = 80$, $x = 58, 81$, $y = 46, 99$. Si l'on prend donc au lieu du rapport de dix à huit, celui très-approchant de 58, 81 à 46, 99 pour le rapport de la montée à la demi-base ; l'arc SA sera partagé en 80 voussoirs égaux, et la Table présentera les calculs tout faits pour les 80 voussoirs : on pourra les réduire à 40 ou 20 ou 10. Il est aisé de voir comment il faut se conduire dans tous les autres cas. On pourra, pour simplifier, multiplier tous les nombres de la Table par $\frac{8}{49,99}$, ou 0,1702, et construire ensuite la courbe ; alors la demi-base sera 8, et la montée 10,01.

Si l'on veut avoir le C qui convient à la chaînette demandée, il suffit de prendre pour a et b le premier x et le premier y de la Table corrigée, et d'en substituer les valeurs dans l'équation $\frac{1}{C} = \frac{2a}{b^2}$ — etc. dont le premier terme suffit, à cause de la petitesse de la première valeur de x. On verra que cela revient à multiplier le C de la Table, ou 25 par $\frac{8}{46,99}$, ce qui donne 4,255.

Si on ne trouvait pas dans la Table un rapport assez approché de celui qu'on veut établir entre la montée et sa demi-base, on pourrait intercaler d'autres termes entre ceux de la Table, et approcher de plus près du rapport donné; mais cela sera presque toujours superflu. (*Voyez* n° 32.)

Table des rapports entre l'arc $SM = s$, l'abscisse $SP = x$, l'ordonnée $PM = y$, la sous-normale $PR = z$, pour la chaînette ordinaire dont $C = 25$.

s	*y*	*x*	*z*	*s*	*y*	*x*	*z*
1	1,00	0,02	25,00	26	22,73	11,08	21,86
2	2,00	0,08	24,97	27	23,42	11,80	21,68
3	2,99	0,18	24,94	28	24,09	12,54	21,51
4	3,99	0,32	24,91	29	24,76	13,29	21,34
5	4,97	0,50	24,86	30	25,40	14,05	21,17
6	5,95	0,71	24,79	31	26,04	14,83	21,00
7	6,92	0,96	24,71	32	26,66	15,61	20,83
8	7,87	1,25	24,60	33	27,27	16,41	20,66
9	8,82	1,57	24,50	34	27,87	17,21	20,49
10	9,75	1,93	24,37	35	28,45	18,02	20,33
11	10,67	2,31	24,25	36	29,03	18,83	20,16
12	11,58	2,73	24,12	37	29,59	19,66	20,00
13	12,47	3,18	23,98	38	30,14	20,49	19,83
14	13,36	3,65	23,86	39	30,68	21,33	19,67
15	14,23	4,16	23,72	40	31,22	22,17	19,51
16	15,07	4,68	23,55	41	31,74	23,02	19,36
17	15,90	5,23	23,38	42	32,26	23,88	19,20
18	16,72	5,81	23,22	43	32,77	24,74	19,05
19	17,52	6,40	23,05	44	33,27	25,61	18,90
20	18,31	7,01	22,89	45	33,76	26,48	18,75
21	19,08	7,65	22,72	46	34,24	27,36	18,61
22	19,84	8,31	22,55	47	34,71	28,24	18,46
23	20,59	8,98	22,38	48	35,18	29,12	18,32
24	21,32	9,66	22,21	49	35,64	30,01	18,18
25	22,03	10,36	22,03	50	36,09	30,90	18,05

Suite de la Table.

s	y	x	z	s	y	x	z
51	36,53	31,80	17,91	76	45,77	55,01	15,06
52	36,97	32,70	17,77	77	46,08	55,96	14,96
53	37,40	33,60	17,64	78	46,39	56,91	14,87
54	37,82	34,51	17,51	79	46,69	57,86	14,77
55	38,24	35,42	17,38	80	46,99	58,81	14,68
56	38,65	36,33	17,25	81	47,29	59,77	14,59
57	39,06	37,24	17,13	82	47,58	60,72	14,50
58	39,46	38,16	17,01	83	47,87	61,68	14,42
59	39,85	39,08	16,89	84	48,16	62,64	14,33
60	40,24	40,00	16,77	85	48,44	63,60	14,25
61	40,62	40,93	16,65	86	48,73	64,56	14,16
62	40,99	41,85	16,53	87	49,00	65,52	14,08
63	41,36	42,78	16,42	88	49,28	66,48	14,00
64	41,73	43,71	16,30	89	49,55	67,44	13,92
65	42,09	44,65	16,19	90	49,82	68,41	13,84
66	42,45	45,58	16,08	91	50,09	69,37	13,76
67	42,80	46,51	15,97	92	50,35	70,34	13,68
68	43,15	47,45	15,86	93	50,61	71,30	13,60
69	43,49	48,39	15,76	94	50,87	72,27	13,53
70	43,83	49,33	15,65	95	51,13	73,24	13,45
71	44,17	50,28	15,55	96	51,38	74,20	13,38
72	44,50	51,22	15,45	97	51,63	75,17	13,31
73	44,82	52,17	15,35	98	51,88	76,14	13,23
74	45,14	53,11	15,25	99	52,13	77,11	13,16
75	45,46	54,06	15,16	100	52,37	78,08	13,09

Suite de la Table.

s	y	x	z	s	y	x	z
101	52,61	79,05	13,02	126	58,00	103,45	11,51
102	52,85	80,02	12,95	127	58,20	104,42	11,46
103	53,09	81,00	12,89	128	58,39	105,42	11,41
104	53,32	81,97	12,82	129	58,58	106,40	11,36
105	53,55	82,94	12,75	130	58,77	107,38	11,30
106	53,78	83,91	12,69	131	58,96	108,35	11,25
107	54,01	84,89	12,62	132	59,15	109,35	11,20
108	54,24	85,86	12,56	133	59,34	110,33	11,15
109	54,47	86,83	12,50	134	59,52	111,31	11,10
110	54,69	87,81	12,43	135	59,71	112,28	11,06
111	54,91	88,78	12,37	136	59,89	113,28	11,01
112	55,13	89,76	12,31	137	60,07	114,26	10,96
113	55,35	90,73	12,25	138	60,25	115,25	10,91
114	55,56	91,71	12,19	139	60,43	116,23	10,87
115	55,77	92,68	12,13	140	60,60	117,22	10,82
116	55,98	93,66	12,07	141	60,77	118,20	10,77
117	56,19	94,64	12,01	142	60,95	119,18	10,73
118	56,39	95,62	11,95	143	61,12	120,15	10,68
119	56,60	96,59	11,90	144	61,29	121,15	10,64
120	56,80	97,57	11,84	145	61,46	122,14	10,59
121	57,00	98,55	11,78	146	61,63	123,12	10,55
122	57,21	99,53	11,73	147	61,79	124,11	10,50
123	57,41	100,51	11,67	148	61,96	125,10	10,46
124	57,61	101,49	11,62	149	62,12	126,09	10,42
125	57,81	102,47	11,57	150	62,29	127,08	10,38

14. Après avoir tracé la chainette, il restera à déterminer l'extrados : deux partis se présentent : si on le calcule d'après l'équation (6) du n° 2, l'épaisseur de la voûte ira toujours en augmentant depuis la clef, quoique peu sensiblement, ainsi qu'on le verra ci-après; en revanche, la poussée sera un peu moins considérable.

Le second moyen consiste à tracer en dehors et en dedans de la chainette, à la distance $\frac{1}{2}k$ moitié de l'épaisseur, deux courbes parallèles à la chainette. Ces courbes ne sont point des chainettes, quoiqu'elles aient la même développée qu'elles : elles remplissent néanmoins la condition d'équilibre, car il est aisé de sentir qu'en prenant des arcs égaux sur la chainette intermédiaire, tous les voussoirs seront égaux en surface, quoique les trapèzes dont ils sont formés soient de figure différente. Le poids de chaque voussoir sera donc proportionnel à l'arc de chainette, et la condition d'équilibre sera remplie. Il est vrai que la chainette ne passera pas par les centres de gravité des voussoirs, mais cela n'est pas nécessaire pour l'équilibre, parce que les joints ont une grandeur finie.

On peut remarquer que les intervalles des joints iront un peu en augmentant depuis la clef, sur l'intrados, et en diminuant sur l'extrados. Rien n'empêcherait de faire les intervalles égaux sur l'extrados; mais alors le poids des voussoirs irait un peu en augmentant depuis la clef, ce qui au reste ne nuirait pas à l'équilibre.

Je vais chercher la grandeur K des joints, par l'équation (6) du n° 2, pour le cas où l'on voudrait que l'intrados fût une chainette.

On a ici $ds = \frac{(x+c)dx}{\sqrt{x^2+2cx}}$; $dy = \frac{cdx}{\sqrt{x^2+2cx}}$, et l'on trouve $R = \frac{(x+c)^2}{c}$, d'où pour la clef, $r=c$. Substituant ces valeurs dans l'équation (6) qui est $K = -R + \sqrt{\frac{(k^2+2rK)ds^2}{dy^2} + R^2}$, on a

$$K = -\frac{(x+c)^2}{c} + \frac{(x+c)}{c}\sqrt{k(k+2c)+(x+c)^2}.$$

Si on développe en série le radical de l'expression de K, et qu'ensuite on fasse x infinie, on trouve pour K la quantité finie

$K = k + \frac{k^2}{2c}$, qui fait voir que la grandeur K des joints va en augmentant depuis la clef où elle est k. On voit en même temps que dans la pratique, lorsque l'intrados est une chaînette, on ne peut donner une épaisseur uniforme à la voûte que dans le cas où $\frac{k^2}{2c}$ est très-petit, résultat qui n'a pas encore été remarqué, du moins que je sache.

Ce résultat peut encore se démontrer ainsi qu'il suit : La surface du voussoir qui est à l'extrémité infinie de la chaînette est Kds; la surface de celui qui est à la clef, est (en observant qu'en ce point $R = c$) $\frac{kds}{2c}(k + 2c)$. Or dans la chaînette, l'équilibre exige que ces deux voussoirs soient égaux en surface; en les égalant, on trouve, comme ci-dessus; $K = k + \frac{k^2}{2c}$.

15. *Trouver l'intrados qui a son extrados parallèle.* Il suffit pour résoudre ce problème, d'intégrer l'équation

$$K = -R + \sqrt{\frac{cds^2}{dy^2} + R^2},$$

en considérant K comme une constante égale à k. Pour cela, je la mets sous cette forme $k^2 + 2Rk = \frac{cds^2}{dy^2}$. Je mets pour R son expression $-\frac{dxds}{d^2y}$, dans laquelle ds est constant, et j'ai

$$k^2d^2y - 2\,kdxds = \frac{cds^2d^2y}{dy^2},$$

dont l'intégrale est

$$k^2dy - 2kxds = -\frac{cds^2}{dy} + c'ds, \text{ ou } k^2dy^2 + cds^2 - (2kx + c)dsdy = 0.$$

On peut dès-à-présent déterminer c', en observant qu'à la clef, on doit avoir $x = 0$ et $dy = ds$: cette condition donne $c' = k^2 + c$.

Pour intégrer de nouveau, je mets pour ds, sa valeur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$: je fais ensuite $dx = pdy$, et j'ai la transformée

$$C' + cp^2 - (2kx + c')\sqrt{1 + p^2} = 0, \text{ ou } x = \frac{c' + cp^2}{2k\sqrt{1 + p^2}} - \frac{c'}{2k} \ldots\ldots (a)$$

Je

Je reprends l'équation $dx = pdy$ ou $dy = \frac{dx}{p}$, dont l'intégrale est $y = \frac{x}{p} + \int \frac{xdp}{p^2}$. Substituant pour x sa valeur et intégrant, on a, toutes réductions faites,

$$y = -\frac{kp}{2\sqrt{1+p^2}} + \frac{c}{2k} \log (p + \sqrt{1+p^2}) \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

équation à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter, puisqu'elle donne $y = 0$ quand $p = 0$, comme cela doit être à la clef.

On déterminera la constante C, par la condition que l'équation donne $x = a$ quand $y = b$.

On construira la courbe au moyen des équations (a et b), et son extrados au moyen de l'équation (6) du n° 2, qui donnera $K = k$. Si on fait k infiniment petit dans les calculs précédens, on retrouvera la chaînette, comme cela doit être.

On peut se convaincre que l'intrados et l'extrados du présent problème, ne sont autre chose que les deux courbes parallèles menées à la distance $\frac{1}{2} k$ d'une chaînette intermédiaire.

16. Soit SA la demi-arche d'un pont qui doit être chargée de terre jusqu'à l'horizontale S'Q : on demande quelle doit être la courbure de l'intrados SA pour l'équilibre.

(Fig. 11.) Chaque élément Mm ou ds est poussé verticalement par un poids proportionnel au rectangle MmqQ supposé homogène, dont l'expression, en faisant $SS' = k$, est $(x + k) dy$. La force Q qui agit sur chaque point de Mm, est donc ici $(x + k) \frac{dy}{ds}$, et l'on a d'ailleurs $P = 0$. L'équation (9) du n° 4 se réduit à $d\left(\frac{QRdy^2}{ds^2}\right) = 0$: intégrant, on a $\frac{QRdy^2}{ds^2} = c^2$: mettant pour Q sa valeur et pour R son expression $\frac{dxds}{-d^2y}$, il vient $(x + k) dx = -\frac{c^2ds^2d^2y}{dy^3}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{2} x^2 + kx + c'^2 = \frac{c^2ds^2}{2dy^2}$: faisant attention qu'à la clef on doit avoir $x = 0$; $ds = dy$, on en conclut $2c'^2 = c^2$, et l'équation ci-dessus devient, en mettant pour ds^2 sa valeur

$dx^2 + dy^2$, $dy = \frac{cdx}{\sqrt{x^2 + 2kx}}$, dont on trouve que l'intégrale est $y + c' = c \log(x + k + \sqrt{x^2 + 2kx})$. On détermine c', en observant qu'on doit avoir en même temps $x = 0$; $y = 0$; ce qui donne $c' = c \log k$, d'où il vient

$$y = c \log \frac{x + k + \sqrt{x^2 + 2kx}}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

On détermine c en assujétissant la courbe à passer par la naissance A, où $x = a$ et $y = b$, ce qui donne $c = \frac{b}{\log \frac{a + k + \sqrt{a^2 + 2ak}}{k}}$.

En mettant l'équation (c) sous cette forme

$$\frac{k}{c} y = k \log \frac{x + k + \sqrt{x^2 + 2kx}}{k},$$

et en se rappelant que dans la chaînette le rayon de courbure est k lorsque l'équation est $y' = k \log \frac{x + k + \sqrt{x^2 + 2kx}}{k}$, on reconnaîtra aisément que si on construit la chaînette représentée par cette dernière équation, et qu'on multiplie toutes ses ordonnées y' par le rapport $\frac{c}{k}$, on aura les ordonnées y de la courbe cherchée SA. M. Bossut s'est occupé du présent problème (*Dynamique*, Recherches sur l'équilibre des voûtes, n° 10); il a fait une méprise manifeste, en supposant que la force verticale qui agit sur chaque point de la courbe est $x + k$, tandis qu'elle est $(x + k)\frac{dy}{ds}$. L'équation qu'il a obtenue n'appartient pas au problème présent; elle donne la courbure d'une corde qui porterait en chacun de ses points un poids proportionnel à $(x+k)$. On peut remarquer en passant combien nos équations (9 et 11) sont plus simples et plus commodes pour l'intégration que la formule employée par M. Bossut.

Pour obtenir l'équation à laquelle est arrivé ce géomètre, il faut intégrer trois fois l'équation $d\left(\frac{QRdy^2}{ds^2}\right) = 0$: on a d'abord $(x + k)\, dx = -\frac{cdsd^2y}{dy^2}$; puis $\frac{1}{2}x^2 + kx + c' = \frac{cds}{dy}$: on trouve

$c' = c$, et l'on arrive à l'équation $dy = \frac{cdx}{\sqrt{(\frac{1}{2}x^2 + kx)^2 + 2c(\frac{1}{2}x^2 + kx)}}$, équation qui revient au même que celle de Bossut.

17. Examinons le cas où l'on aurait $Q = o$ et $P = f(x)$: ce cas aurait *lieu*, si la voûte devait être chargée d'un fluide pesant, ou même d'un sable très-mobile; parce qu'alors le poids du liquide agit perpendiculairement à l'extrados, et proportionnellement à la hauteur de la colonne du fluide au-dessus du point pressé.

Faisant $Q = o$; $P = f(x)$ dans l'équation (11) du n° 6, et intégrant, on a $f(x) = \frac{C}{R}$: multipliant par dx, et mettant $\frac{dxds}{-d^2y}$ pour R, il vient $dx.f(x) = -\frac{cd^2y}{ds}$ dont l'intégrale est $\int dx.f(x) = c' - \frac{cdy}{ds}$, d'où, en mettant pour ds sa valeur, on tire

$$dy = \frac{dx\{c' - \int dx.f(x)\}}{\sqrt{c^2 - \{c' - \int dx.f(x)\}^2}}.$$

La hauteur de la colonne du fluide est ici $x + k = f(x)$; de plus, l'équation doit donner $x = o$ quand $\frac{dx}{dy} = o$, ou quand $dy = ds$, d'où l'on tire $c' = c$. Faisant ces substitutions, la dernière équation devient

$$dy = \frac{dx(2c - 2kx - x^2)}{\sqrt{4c^2 - (2c - 2kx - x^2)^2}} \ldots\ldots\ldots (d)$$

qui appartient à la courbe appelée *élastique*, et qui s'intègre par des arcs de sections coniques.

On peut remarquer que si on a k infini dans l'équation (d), elle devient intégrable, et donne un cercle dont le centre est sur la montée; car alors le terme $- x^2$ s'anéantit vis-à-vis du terme $- 2kx$.

Remarquons encore que l'élastique trouvée est la courbe que prend un linge chargé d'un fluide ; car alors le linge remplace l'intrados, et la pression qui se faisait de dehors en dedans dans le cas de la voûte, agit ici de dedans en dehors.

18. Voici un exemple un peu plus composé, et qui renferme à-la-fois les deux précédens.

Je suppose que P et Q sont tous deux des fonctions de x et de constantes. Je prends l'équation (11) du n° 6, qui étant intégrée, devient $PR + \frac{QRdy}{ds} - \int Qdx = c$. Mettant pour R sa valeur $\frac{dxds}{-d^2y}$ dans l'hypothèse de ds constant, et multipliant tout par $-d^2y$, il vient

$$Pdxds + Qdxdy + d^2y\int Qdx = -cd^2y,$$

dont l'intégrale est

$$ds\int Pdx + dy\int Qdx = -cdy + c'ds.$$

Mettant pour ds sa valeur, il vient

$$dy = \frac{dx(-\int Pdx + c')}{\sqrt{(c + \int Qdx)^2 - (c' - \int Pdx)^2}} \ldots\ldots\ldots (e)$$

Supposons, pour faire une application, que les voussoirs aient une épaisseur partout égale, et qu'ils soient chargés d'un fluide dont la hauteur SS′ (fig. 11) au-dessus de la clef soit k : nous pourrons supposer, pour plus de simplicité, que l'épaisseur des voussoirs en pierres soit représentée par une épaisseur g du fluide ; g vaudra 2 ou 3 ou 4, etc., si la densité de la pierre est 2 fois, 3 fois, 4 fois celle du fluide. On aura $Q = g$; $P = x + k$; $\int Qdx = gx$; $\int Pdx = \frac{1}{2}x^2 + kx$. Substituant ces valeurs dans l'équation (e), et déterminant c' par la condition que l'on ait à-la-fois $x = 0$ et $\frac{dx}{dy} = 0$, ce qui donne $c' = c$, on aura

$$dy = \frac{dx(2c - 2kx - x^2)}{\sqrt{4(c + gx)^2 - (2c - 2kx - x^2)^2}},$$

équation qui s'intégrera soit par les séries, soit par la rectification des sections coniques, et dont on déterminera la constante c, ainsi que la nouvelle constante introduite par la dernière intégration, par les conditions qu'on ait à la clef $x = 0$, $y = 0$, et aux naissances $x = a$, $y = b$.

19. *Intrados qui a une ligne droite pour extrados.* Après avoir parcouru quelques exemples dans lesquels il s'agissait de trouver l'intrados par la connaissance de la loi des forces, je vais en donner un dans lequel on connaît, non la loi des forces, mais la courbe

d'extrados. Le problème revient au même dans le fond, mais il se présente sous un aspect différent.

On veut faire un pont ou berceau dont l'extrados qui représente le chemin soit une ligne droite horizontale, et dont les voussoirs occupent tout l'espace compris entre l'extrados et l'intrados. On demande la courbe d'intrados (fig. 12).

Je prends les équations (7 et 8) du n° 3, auxquelles il faut joindre celle de l'extrados $y' = \mathrm{f}(x')$, qu'on verra être $\epsilon y' = x' + k$ (si pour plus de généralité on suppose que la ligne droite de l'extrados doive faire avec l'horizon un angle dont la tangente soit ϵ). Je substitue pour x' sa valeur $\epsilon y' - k$, dans l'équation (7), de laquelle ayant tiré celle de y', je la substitue dans l'équation (8) : je quarre celle-ci, et j'ai pour l'équation différentielle de la courbe cherchée, la suivante

$$\left(\frac{x+k-\epsilon y}{dy+\epsilon dx}\right)^2 ds^2 + 2R ds \frac{x+k-\epsilon y}{dy+\epsilon dx} = \frac{c ds^2}{dy^2}.$$

Je me bornerai pour l'intégration au cas où la ligne droite de l'extrados doit être horizontale : alors on a $\epsilon = 0$, et l'équation se réduit à $(x+k)^2 ds + 2R\,(x+k)\,dy = c ds$.

Mettant pour R sa valeur $-\frac{dxds}{d^2y}$, dans laquelle ds est constant, il vient $\frac{d^2y}{dy} - \frac{2dx(x+k)}{(x+k)^2-c} = 0$, dont l'intégrale est

$$\log dy - \log\{(x+k)^2 - c\} = \log c'.ds\,;$$

d'où l'on tire

$$dy = c'ds\,\{(x+k)^2 - c\}.$$

Je détermine c' en observant qu'à la clef on doit avoir, à-la-fois, $x = 0$ et $dy = ds$, ce qui donne $c' = \frac{1}{k^2-c}$. Substituant pour ds sa valeur $\sqrt{dx^2+dy^2}$, on a finalement

$$dy = \frac{dx\{(x+k)^2-c)\}}{\sqrt{(k^2-c)^2 - \{(x+k)^2-c\}^2}} \ldots\ldots\ldots (f):$$

équation qui appartient à la courbe élastique. Il n'est pas douteux que les ingénieurs devraient adopter cette courbe pour les ponts ; elle leur procurerait plus de solidité, et autant d'élégance que celles en usage.

CHAPITRE II.

DE LA POUSSÉE DES BERCEAUX, ET DE L'ÉQUILIBRE ENTRE LA VOÛTE ET LES PIEDS-DROITS.

SECTION PREMIÈRE.

Notions préliminaires.

20. *Réflexions.* DANS le chapitre précédent, nous avons déterminé les conditions d'équilibre entre les voussoirs d'une voûte en berceau; nous avons appris à déterminer l'intrados quand on connaît l'extrados, et *vice versâ*. Il reste à mettre en équilibre la voûte elle-même avec les pieds-droits qu'elle tend à renverser ou à faire glisser sur la plate-forme qui les supporte.

Ce second problème n'admet pas de solution rigoureuse, parce qu'on ne connaît pas au juste la manière dont les voussoirs agissent les uns sur les autres; je m'explique: si les voussoirs étaient sans frottement, et équilibrés entre eux d'après les principes du chapitre premier, on pourrait par la théorie seule évaluer l'effort que la voûte exerce pour écarter les pieds-droits: il est rare que les voûtes soient construites d'après les principes de l'équilibre; les voussoirs ne se contrebalancent point, le frottement seul empêche que quelques-uns d'eux ne soient expulsés de leur place par un mouvement de dedans en dehors. Le défaut d'équilibre tend à produire un autre mouvement auquel le frottement ne s'oppose point. Certains voussoirs tendent à tourner sur leurs voisins, comme s'ils étaient

liés par une charnière. Cette rotation se fait à l'intrados pour les uns, et à l'extrados pour les autres ; ensorte que la voûte s'ouvre en plusieurs points de l'intrados et de l'extrados. Ces mouvemens de rotation se remarquent très-facilement dans une voûte en petit, faite soit avec du bois, soit avec du plâtre. Ils renverseraient presque toutes les voûtes sans l'adhérence produite par le mortier : cette force tient les voussoirs, pour ainsi dire, collés les uns sur les autres.

On sent que ces deux espèces de force, le frottement et l'adhérence, sont presque impossibles à évaluer ; leurs effets varient à l'infini, non-seulement suivant leur intensité, mais encore suivant la figure de la voûte. La poussée horizontale qui tend à renverser les pieds-droits, est la résultante de toutes les forces ou de toutes les résistances qui agissent sur les voussoirs. Il résulte de là que le problème de la poussée n'admet qu'une solution approchée, puisqu'il dépend de l'arbitraire des données qu'on y fait entrer, et de plusieurs circonstances physiques impossibles à évaluer. Je rapporterai les différentes hypothèses imaginées jusqu'à ce jour ; je les discuterai pour tâcher de distinguer les cas où chacune d'elles est préférable ; je ferai voir qu'elles sont erronées, faute d'avoir apprécié convenablement les effets du frottement. Pour cela, je commencerai par examiner quelques cas d'équilibre, dans lesquels le frottement produit des effets qui paraissent des phénomènes contraires aux lois de la statique.

21. *Effets du frottement.* EFF'E' (fig. 13) est un corps ou coin pesant qui repose entre les faces inclinées EF, E'F', de deux massifs EFBCD, E'F'B'C'D', lesquels peuvent glisser sur les plans horizontaux CD, C'D', et tourner autour des points C et C' : on demande les conditions tant de l'équilibre de rotation autour des points C et C', que du non-glissement des deux massifs, en ayant égard au frottement.

Soit $CD = Z_{,}$; $ED = H_{,}$, α l'angle formé par la verticale avec la face EF du coin ; $2M =$ poids du coin ; $N =$ poids du massif, $\frac{\pi}{1} = \frac{\text{frottement}}{\text{pression}}$, ou, en appelant θ, l'angle du frottement $\pi = \tang \theta$.

Soient R et R' les points par lesquels on suppose que le coin

touche les *massifs* ; je mène par ces points deux lignes faisant avec EF *et* EF′ des angles qui soient complémens de θ : il est clair que si *l'on* applique en Q une force QR, elle ne glissera point contre la face EF, puisqu'elle fait avec cette face l'angle exigé par la grandeur du frottement. Par la même raison, si cette force est l'effet du coin, il n'y aura pas glissement contre la face du massif. Je décompose la force RQ en deux, l'une verticale RP, qui sera égale à la moitié M du poids du coin, l'autre RS, horizontale, qui tend à faire glisser le massif sur sa base : c'est cette force RS que j'appelle la poussée horizontale du coin, et qu'il s'agit de trouver.

En menant SI perpendiculaire sur EF, cette ligne représentera la pression que le coin exerce sur le massif, et RI représentera le frottement π: on aura $RQI=\theta$; $QRI=90°-\theta$; $PRI=\alpha$; $QRP=90°-\alpha-\theta$; $RP=M$: donc $RS=\text{tang}\,(90°-\theta-\alpha)\,M=M\cot(\alpha+\theta)$.

Telle est l'expression de la poussée horizontale que j'appellerai F, et qu'on peut mettre sous une autre forme, en y mettant π pour tang θ.

$$F = M\cot(\alpha+\theta) = M\,\frac{1-\pi\,\text{tang}\,\alpha}{\pi+\text{tang}\,\alpha}\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Pour avoir l'équation de l'équilibre de rotation autour du point C, il faut remarquer que la poussée F tend seule à renverser le massif, et que deux autres M et N tendent à le faire tourner en sens contraire : il suffit d'égaler le moment de la première à la somme de ceux des deux autres.

Pour avoir la condition de mon glissement du massif sur sa base, il suffit de vérifier si la poussée est plus petite que les deux poids qui pressent la base, multipliés par le rapport du frottement de cette base à la pression. Cela posé, on verra aisément que les deux équations ou formules d'équilibre tant de rotation que du non-glissement des massifs, sont :

$$\left.\begin{array}{l} FH_{,} = MZ_{,} + NG \\ F < \pi\,(M+N) \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

en appelant G la distance du point C à la verticale passant par le centre de gravité du massif ; j'ai supposé que le massif, en tournant, glissait par son angle E sur la face du coin, ce qui en effet ne peut pas arriver différemment.

II

Il faut bien faire attention que les deux équations (17) sont entièrement indépendantes l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'elles peuvent avoir lieu l'une sans l'autre : la première concerne le mouvement de rotation, et la seconde le mouvement de translation, deux choses très-distinctes ; et en effet on sent bien que le massif peut tourner sans glisser, ou glisser sans tourner.

La ligne RQ fait avec EF le plus petit angle QRI que puisse comporter le frottement, c'est-à-dire, que si cet angle était plus petit, la force QR glisserait sur EF ; mais si cet angle était plus grand, la force ne glisserait plus : seulement il arriverait qu'elle augmenterait de grandeur ainsi que la poussée, d'autant plus que l'angle QRI serait plus grand. Il suit de là qu'on aurait autant d'expressions différentes de la poussée qu'on voudrait, en prenant l'angle QRI plus grand que le complément de θ. Pour lever l'incertitude, il suffit de se rappeler de ce principe, que la pesanteur tend toujours à produire soit un *maximum*, soit un *minimum* : ici, elle choisit parmi tous les angles QRI plus grands que $90^\circ - \theta$, celui qui exige la plus petite force Q pour soutenir le coin, et θ est un *maximum*.

Au reste, comme il est très-aisé de faire des méprises et d'arriver à plusieurs solutions très-différentes par le principe de la décomposition des forces, quoique ce problème paraisse très-simple, je vais donner une autre solution qui conduit au même résultat.

Soit P la pression inconnue que le coin exerce perpendiculairement en R et en R′ ; le frottement qui est proportionnel à cette pression sera πP. Imaginons en F un fil attaché au pied-droit ou massif, et fixé par l'autre bout en un point quelconque de la face du coin. Imaginons, de plus, que ce fil éprouve une tension $= \pi P$; cette tension remplacera l'effet du frottement.

Si l'on prolonge les directions des deux fils jusqu'en O, et qu'on les compose, il en résultera une force $OO' = 2\pi P \cos\alpha$: cette force dirigée de bas en haut, réduit le poids 2M du coin à $2M - 2\pi P \cos\alpha$: si l'on cherche la pression perpendiculaire, ainsi que la poussée horizontale que cette force produit en R, on trouvera que la pression est $\frac{M - \pi P \cos\alpha}{\sin\alpha}$, et que la poussée est $\cot\alpha\,(M - \pi P \cos\alpha)$.

Mais il reste une force dont nous n'avons pas encore tenu compte,

c'est l'effet de la tension du cordon sur le point F; la réaction de cette tension y produit, dans le sens BF, une force horizontale opposée à la poussée; son expression est πP sin α : ainsi la poussée est cot α (M — πP sin α) — πP sin α.

Il reste à trouver la valeur de P pour la mettre dans l'expression de la poussée : or nous avons trouvé ci-dessus la pression $P=\frac{M-\pi P\cos\alpha}{\sin\alpha}$, on en tire $P=\frac{M}{\sin\alpha+\pi\cos\alpha}$. Substituant cette valeur de P dans l'expression trouvée ci-dessus pour la poussée, on a poussée $=F=M\cot\alpha-\frac{\pi M}{\sin^2\alpha+\pi\sin\alpha\cos\alpha}$, expression qu'on ramène aisément à celle de l'équation (16).

Les figures (14, 15, 16, 17, 18) sont des cas particuliers du même problème. Pour simplifier les figures, j'ai remplacé les massifs par une verge pesante CR : on voit toujours la direction RQ, suivant laquelle le corps supérieur ou coin agit contre la verge. Cette ligne RQ fait toujours le plus grand angle RQI que puisse admettre le frottement. Dans la fig. 14, les faces du coin sont parallèles et verticales, et sans le frottement, aucune verge, si pesante qu'elle fût, ne pourrait le soutenir. Dans la fig. 15, les faces du coin sont perpendiculaires sur les verges.

Dans la figure 16, la même face horizontale repose sur les verges.

Dans les figures 17 et 18, l'effet du frottement est encore plus remarquable; il tend à rapprocher les verges en les faisant glisser en C l'une vers l'autre, tandis que dans les cas précédens, elles tendaient à s'éloigner. Ici le point T d'application de la pesanteur sur le corps supérieur doit être pris en-dessous, et il faut substituer à la pesanteur représentée par Tt les deux forces TK, TK'.

Enfin dans la figure 19, les verges qui ne peuvent que tourner autour des points C et C', y sont attachées, et tiennent par leur poids le coin suspendu en-dessous des points d'appui; ce cas diffère des précédens, en ce que la pression qui a lieu en R est ici produite par les verges, tandis qu'auparavant elle était l'effet du coin. Les formules 16 et 17 n'ont plus lieu pour le cas de la figure 19. On sent que quand les verges CR, C'R', deviennent verticales, l'équilibre est impossible, parce qu'il n'y a plus de pression en R.

Pour compléter le problème, je vais chercher la formule qui convient au cas particulier d'équilibre représenté par la figure 19. Il faut concevoir que la partie du poids de la verge CR, qui agit en R, soit représentée par une ligne verticale passant par ce point; et qu'on ait décomposé cette force en deux autres, l'une qui tire suivant la verge (laquelle je n'ai point marquée dans la figure pour ne pas la compliquer); l'autre RQ, qui fait avec la face du coin le plus petit angle RQI que permette le frottement : cette force RQ se décompose en deux autres, l'une $RP = M$, laquelle porte le poids du coin; l'autre, RS, qui, en réagissant contre la verge, opère la poussée horizontale du coin. Soit $IRP = \alpha$, $RQI = \theta$, on a $QRP = 90^\circ - (\theta - \alpha)$, d'où l'on tire aisément

$$RS = QP = RP \operatorname{tang} QRP, \text{ et } RS = F = M \cot(\theta - \alpha);$$

et en appelant $CD = Z_1$, $RD = H_1$, $G =$ distance du point C à la verticale passant par le centre d'inertie de la verge, on a pour l'équation d'équilibre, $FH_1 = MZ_1 + NG$.

Pression normale. La pression normale qui a lieu au point de contact R, est encore utile à considérer : c'est par elle qu'on juge si les matériaux peuvent la supporter sans s'écraser : on a fait pour cela des expériences qui font connaître quelle charge chaque espèce de pierre peut soutenir avant d'en être brisée. La pression peut provenir ou du coin ou du corps qui presse le coin. Voyons d'abord le premier cas.

Si le coin repose sur deux plans fixes, la pression normale est, comme nous l'avons trouvée, $P = \frac{M}{\sin\alpha + \pi \cos\alpha}$: on peut encore déduire cette même valeur de la ligne QI (fig. 13); car le triangle RQP donne $\overline{QR}^2 = M^2 + F^2$, et le triangle QRI donne $\overline{QR}^2 = P^2 + \pi^2 P^2$, d'où l'on déduit aisément la valeur ci-dessus de P. Si le coin est un peu trop pesant ou la verge trop faible, l'équilibre est détruit, et le coin chasse les corps adjacens.

Mais si les corps adjacens sont plus pesans que l'exige l'équation d'équilibre, ils tendent à faire remonter le coin, et le frottement seul s'y oppose. La pression devient plus grande qu'elle ne l'était dans l'état d'équilibre : elle n'est plus produite par le coin, mais

par les corps adjacens : ce n'est plus l'équilibre qui a lieu ; c'est une stabilité plus grande.

Soit (fig. 13*) $CD = Z_{,}$, $RD = H_{,}$, angle $C = \gamma$: je décompose le poids N de la verge en deux, l'un agissant en C, l'autre agissant en R ; ce dernier est $\frac{NG}{Z_{,}} = Rp$: je décompose cette force en deux, l'une Rq, qui sera détruite en C ; l'autre Rr, perpendiculaire à la face du coin, et que j'appelle P′.

Dans le triangle Rpr on a $Rpr = 90° - \gamma$, $Rrp = \gamma - \alpha$; $Rp = \frac{NG}{Z_{,}}$, d'où l'on tire aisément

$$P' = \frac{NG \cos\gamma}{Z_{,} \sin(\gamma - \alpha)} = \frac{NG}{H_{,} \cos\alpha - Z_{,} \sin\alpha},$$

(en observant que $\tang \gamma = \frac{H_{,}}{Z_{,}}$).

Pour s'assurer si c'est P ou P′ qui a lieu en R, il ne faut que vérifier laquelle est la plus grande. Mais si (fig. 13) le corps N est un autre coin, par exemple un voussoir, la pression qui aura lieu en R, ne pourra pas être trouvée par la formule précédente : nous verrons ailleurs comment il faut s'y prendre.

SECTION II.

Différentes hypothèses sur la poussée.

22. *Hypothèse du coin de la Hire.* Je commencerai par rapporter les différentes hypothèses imaginées sur la poussée ; je les discuterai ensuite, pour savoir laquelle on doit préférer dans chaque cas. Celle qui fait l'objet de ce n°, a été donnée par M. de la Hire.

On suppose dans cette hypothèse, que la voûte tend à se rompre dans les joints symétriquement placés EF, E′F′ (fig. 20), et que les deux portions de voûte EF*a*A, E′F′*a*′A′ demeurent adhérentes aux pieds-droits par l'effet du ciment : alors la partie du milieu EFF′E′, fait l'effet d'un coin qui agit contre les plans EF, E′F′, pour faire tourner les pieds-droits autour des points fixes C et C′.

Soit TR une perpendiculaire élevée sur le milieu du joint EF, et rencontrant la montée en T : je prends $Tt = 2M =$ poids du coin EFF'E'; je décompose Tt en deux autres forces TK, TK', j'imagine TK appliqué au point R de sa direction, et ayant pris $Rr = TK$, je la décompose en deux, l'une Rs horizontale, l'autre Rx verticale.

Soit RR' la verticale passant par R, et GG' celle qui passe par le centre de gravité G de la portion de voûte EFaA : cela posé, soit prise la notation suivante.

$OA = b$, $OR' = q$, $OG' = D$, $N =$ poids de l'espace EFaA; $RR' = h$, $AD = H$, $DC = Z$, α l'angle xRE, formé par le joint EF avec celui de la verticale; f la densité des matériaux des pieds-droits, celle de la voûte étant 1.

La force Rs tend à faire tourner le pied-droit autour du point C; c'est la poussée horizontale du coin : trois autres tendent à le faire tourner en sens contraire, savoir Rx, le poids N, et celui du pied-droit.

On a $Rr = TK = M\frac{1}{\sin\alpha}$, $Rs = M\cot\alpha$, $Rx = M$; poids du pied-droit $= f.H.Z$.

Le moment de la force Rs est $M\cot\alpha(H+h)$, celui de la force Rx est $M(b+Z-q)$; celui de l'aire EFaA est $N(b+Z-D)$, et celui du pied-droit est $\frac{1}{2}fHZ^2$.

Égalant le moment de la première force à la somme des trois autres, on aura l'équation suivante d'équilibre, qui fera connaître Z, si H est connu, et réciproquement

$$M\cot\alpha(H+h) = M(b+Z-q) + N(b+Z-D) + \tfrac{1}{2}fHZ^2 \ldots (18).$$

Quant à la valeur de l'angle α, c'est à l'expérience à la donner. On est en usage d'imaginer un rectangle formé par les lignes OA, OS et leurs parallèles : l'intersection de l'intrados par la diagonale de ce rectangle, détermine le point E : on sent combien cette règle est arbitraire.

Il ne suffit pas, pour que la voûte et les pieds-droits soient en repos, que l'équation (18) soit satisfaite; il faut encore que la voûte ne puisse pas glisser sur le pied-droit : cet effet, qui peut avoir lieu si le joint des naissances est horizontal, est empêché soit par le

ciment, soit par tout autre obstacle; il faut encore que le pied-droit ne glisse pas sur sa plate-forme. La force qui tend à produire cet effet est Rs; celle qui s'y oppose est la somme des poids de la demi-voûte et du pied-droit, multipliée par le rapport π du frottement à la pression. Ainsi on a, pour exprimer qu'il n'y a pas de glissement du pied-droit, la condition suivante :

$$M \cot \alpha < \pi (M + N + fHZ) \ldots\ldots\ldots (19).$$

Il faut bien observer que les équations (18) et (19) peuvent avoir lieu l'une sans l'autre, et qu'elles sont indépendantes, c'est-à-dire qu'il peut y avoir rotation sans glissement, comme glissement sans rotation; il faut, pour le repos absolu du système, que les deux conditions existent à-la-fois.

Un savant Géomètre a fait entrer dans cette dernière question la considération de la force accélératrice de la pesanteur, qui est étrangère au sujet, quand on cherche l'équilibre entre des corps pesans qui ne sont animés d'aucun mouvement.

23. *Hypothèse de la rupture aux reins et à la clef.* On suppose ici que la voûte s'ouvre vers la clef à l'intrados, et vers les reins à l'extrados, comme on le voit en S, F, F′ (fig. 21) : les portions de voûte SS′FE et SS′F′E′, agissent comme deux arcs-boutans qui s'appuient l'un contre l'autre en S′, et poussent en E et E′, les autres parties de la voûte supposées adhérentes aux pieds-droits, pour les faire tourner autour des points fixes C et C′

Pour se faire une idée nette de la manière dont s'établit l'équilibre entre les quatre corps du système, imaginons par le centre de gravité I de la portion de voûte SS′FE, la verticale LL′, par le point S′ l'horizontale S′E″; par le point E, l'horizontale EL et la verticale E″E′. Représentons par LL′ le poids M de la partie de voûte SS′FE, et soit L′ le point d'application de cette force : si l'on imagine trois autres forces, la première L′E″ dirigée de L′ vers E″, la seconde EL appliquée en E, et dirigée de E vers L, la troisième EE″, dirigée de E vers E″, il est évident que ces quatre forces seront en équilibre, parce qu'elles auront deux à deux, en sens contraire, la diagonale EL′ pour résultante : donc la force L′E″,

prise en sens contraire, est la pression exercée en S'; donc aussi la même force L'E'' = LE est la poussée horizontale Es, qui tend à renverser le pied-droit. Par la même raison, EE'' = M est la charge ou pression verticale Ex, qui a lieu en E.

Je prends la notation suivante, SS'FE = M, EEaA = N, EE' = h, EL = l, OE' = q, OG' = D, OA = b, OS = a, SS' = k, AD = H, DC = Z, densité de pied-droit = f, rapport du frottement à la presion = π.

On aura Ex = M, EE'' = $a+k-h$, E$s = \frac{M.l}{a+k-h}$; égalant le moment de la force Es autour du point C, à la somme des momens des forces Ex, N, fHZ, qui agissent en sens contraire de la poussée, on aura, pour l'équation d'équilibre de rotation, et pour condition du non-glissement des pieds-droits, les formules suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{M.l}{a+k-h}(h+H)=M(b+Z-q)+N(b+Z-D)+\frac{1}{2}fHZ^2\\ \frac{M.l}{a+k-h}<\pi(M+N+fHZ).\end{array}\right\}\ldots(20).$$

L'emploi de ces formules exigerait qu'on connût la position du joint de rupture EF, laquelle dépend de la figure de la voûte et de plusieurs circonstances physiques. Il paraît, par quelques expériences rapportées par M. Perronnet, que dans les ponts très-surbaissés, le joint de rupture est placé près des naissances.

24. *Formules générales pour les berceaux équilibrés.* J'ai déjà dit qu'abstraction faite du frottement, les berceaux équilibrés admettent une solution rigoureuse du problème de la poussée. Je vais chercher dans cet article les formules qui conviennent à cette espèce de voûte parfaite : dans une autre section, j'aurai égard au frottement, et cette théorie ne laissera plus rien à desirer.

Quand un berceau est équilibré, aucune force ne tend à déranger les voussoirs de leur place ; et si l'on opposait de bas en haut, perpendiculairement aux deux joints des naissances, deux forces passant par les centres de gravité des voussoirs, toute la voûte serait soutenue par ces deux forces : ce sont ces deux forces qui

tendent à renverser les pieds-droits; on peut donc considérer toute la voûte comme un seul coin qui repose sur les impostes : cette seule considération suffit pour faire voir que la formule que nous cherchons est comprise dans celles du n° 22, en plaçant le joint de rupture aux naissances. Mais de nouvelles considérations conduisent à des formules plus simples et plus commodes.

Nous avons vu qu'en appelant α l'angle formé par un joint avec la verticale et 2M la masse du coin, la poussée horizontale de ce coin est $\frac{M}{\tang \alpha}$. Nous avons démontré n° 8, que l'aire du berceau est toujours quarrable, et qu'elle est $M=(rk+\frac{1}{2}k^2)\frac{dx}{dy}$ (en appelant k l'épaisseur de la voûte à la clef, et r le rayon de courbure de l'intrados en ce point) : donc, puisque $\tang \alpha=\frac{dx}{dy}$, l'expression de la poussée est $kr+\frac{1}{2}k^2$, c'est-à-dire qu'elle est la même pour une portion quelconque de voûte, propriété très-remarquable que fait aussi voir l'équation $\frac{M}{\tang \alpha}=\frac{dM}{d \tang \alpha}$ trouvée dans le n° 2. Il suit de ce principe que la poussée du petit voussoir élémentaire de la clef, est la même que celle de la voûte, ce qui pourrait paraître étonnant.

La poussée tangentielle du coin s'exerce perpendiculairement au joint Aa (fig. 9), et passe par le point Ϭ, centre de gravité du voussoir des naissances.

On a $Aa=K=-R+\sqrt{(2rk+k^2)\frac{ds^2}{dy^2}+R^2}$ [*Voy.* le n° 2, équation (6)]; $AϬ=\frac{3RK+2K^2}{6R+3K}$, et $AR'=D'=AϬ\sin\alpha=AϬ\frac{dx}{ds}$. Cette valeur de D′ est rigoureuse; mais on sent que dans la pratique on pourra presque toujours faire, sans erreur sensible, $D'=\frac{1}{2}Aa$. on a aussi $ϬR'=AϬ\cos\alpha=h'$.

En se conduisant comme dans le n° 22, on trouvera facilement les formules suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}(h'+H)(2rk+k^2)=\frac{1}{2}(2rk+k^2)\tang\alpha(Z-D')+fHZ^2;\\ 2rk+k^2<\pi[(2rk+k^2)\tang\alpha+2fHZ)]\end{array}\right\}\ldots.(21).$$

Ces formules sont simples et générales ; elles s'appliquent à toute

toute espèce de voûte équilibrée. Je ne sache pas que personne les ait encore données.

Observons que si l'épaisseur de la voûte était très-petite, ensorte qu'on pût regarder les poids des voussoirs comme concentrés sur l'intrados, et qu'on cherchât l'équation d'équilibre dans l'hypothèse des arcs-boutans du n° 23, on arriverait aux mêmes formules. Dans ce dernier cas, il faudrait préalablement chercher le centre de gravité de la demi-voûte, et l'on trouverait que sa distance à la montée est $b - a \cot \alpha$.

SECTION III.

Théorie nouvelle et plus rigoureuse de la poussée, en ayant égard au frottement.

25. *Réflexions préliminaires.* Dans la théorie du coin, on suppose que la poussée oblique ou perpendiculaire à la face du coin, s'exerce toute entière pour renverser le pied-droit : ce principe est évidemment faux quand on a égard au frottement ; car on a vu, n° 21, qu'un parallélipipède pouvait, par l'effet du frottement, être retenu en l'air par le moyen de deux verges appuyées contre ses faces verticales ; ce qui serait évidemment impossible sans le frottement. Nous avons vu, dans ce même article, que le frottement diminue la poussée horizontale du coin, et nous avons trouvé l'équation d'équilibre qui en résulte. La théorie de cet article est entièrement applicable au problème de la poussée des voûtes : il suffit de regarder la verge qui soutient le coin, comme représentant le massif du pied-droit augmenté de la portion de voûte qui lui est supposée adhérente. Il ne reste plus qu'à trouver quelle est la portion qui doit former le coin : c'est à cette recherche que je vais me livrer.

Je distingue trois espèces de voûtes en berceau, ou même quatre. La première comprend celles dans lesquelles le voussoir de la clef chasserait ses voisins sans le frottement ; je les appelle voûtes à clef-prépondérante. La seconde espèce comprend les voûtes dont la clef serait expulsée par les voussoirs voisins, sans le frottement ; ce sont les voûtes à clef en défaut. Enfin la troisième espèce est

celle des voûtes équilibrées, dont chaque voussoir, sans l'aide du frottement, est en équilibre avec ses voisins.

Dans la première espèce, la poussée, exercée par la clef, est égale à la pression qu'elle éprouve, et elle se transmet toute entière aux naissances : si on la compose avec le poids du reste de la demi-voûte, la résultante passe au-delà du point $\mathfrak{E}$ de la fig. 9, et quelquefois au-delà du point *a* : dans ce dernier cas, la voûte serait renversée, si le frottement ne diminuait la poussée de la clef. Dans la seconde espèce la poussée, exercée par la clef, est plus faible que la pression qu'elle éprouve par le reste de la voûte : c'est cette pression qui réagit aux naissances, et qui opère la poussée de la voûte. Si on compose la poussée de la clef avec le poids du reste de la demi-voûte, la direction de la résultante passe entre le point $\mathfrak{E}$ et la verticale du centre de gravité de la demi-voûte : Dans les voûtes équilibrées, la poussée de la clef, égale à sa pression, se transmet toute entière aux naissances : si on la compose avec le poids de la voûte, la résultante passe par le point $\mathfrak{E}$.

Imaginons une voûte équilibrée, et retranchons, par la pensée, un certain poids à chaque voussoir, excepté à celui de la clef : la voûte deviendra de la première espèce ; la clef sera prépondérante ou par excès ; la poussée de la clef sera la même qu'auparavant ; seulement la charge verticale de la voûte sur les pieds-droits sera diminuée : or, avant la soustraction des poids, la poussée horizontale de la clef était celle de la voûte elle-même, et elle était égale à celle d'un autre coin quelconque. Depuis la soustraction des poids, cette poussée de la clef, qui est encore celle de la voûte, est devenue un *maximum :* donc on a la poussée des voûtes de la première espèce, en cherchant celle de la clef, qui est un *maximum*.

Actuellement, faisons le changement inverse. Imaginons qu'on ait retranché un certain poids au voussoir de la clef d'une voûte équilibrée, sans rien ôter aux autres : la clef tendra à être expulsée ; on aura une voûte de la seconde espèce ; la poussée contre les pieds-droits ne sera plus l'effet de la clef, mais de tous les autres voussoirs. Plus le coin sera grand, plus sa poussée sera grande ; on aura donc la poussée de la voûte, en la considérant toute entière comme un seul coin : cette poussée sera encore ici un *maximum*.

Ainsi, dans les deux premières espèces, la poussée de la voûte est égale à celle du coin qui exerce la plus grande : dans les voûtes équilibrées, elle est constante; l'expression de cette poussée est en général $\frac{M}{\tang \alpha}$. Dans la première espèce, M est le plus petit voussoir ΔM de la clef; et si on le suppose infiniment petit, ce qui est plus commode et revient sensiblement au même, la poussée de la voûte sera $\frac{dM}{d.\tang \alpha}$.

Dans les voûtes de la seconde espèce, M embrassera la demi-voûte, et la poussée sera $\frac{M}{\tang \alpha}$.

Dans les voûtes équilibrées, M est arbitraire, et la poussée est indifféremment $\frac{M}{\tang \alpha}$, ou $\frac{\Delta M}{\Delta.\tang \alpha}$, ou $\frac{dM}{d.\tang \alpha}$.

Dans ce qui précède, j'ai eu en vue les voûtes les plus ordinaires; cependant il peut arriver que le coin qui exerce la plus grande poussée ne soit ni le voussoir de la clef, ni la voûte entière : dans ce quatrième cas, il faut recourir au principe, que la vraie poussée de la voûte est la même que celle du coin qui exerce la plus grande, et chercher préalablement le point de l'intrados qui détermine ce coin, en employant l'équation $d\left(\frac{M}{\tang \alpha}\right) = 0$.

Ce qui précède servirait à résoudre ce problème : Étant donné une voûte qui repose sur un plan horizontal sans frottement, trouver sa poussée, c'est-à-dire la force horizontale qu'il faudrait employer de dehors en dedans contre les voussoirs des naissances, pour empêcher que la voûte ne se désempare. Il faut voir à présent si l'addition du pied-droit peut changer la théorie précédente.

Concevons toujours la voûte composée de deux parties, l'une 2M formant coin, l'autre N réunie de chaque côté au pied-droit : je dis que la poussée horizontale du coin se transmet toute entière au centre C de rotation du pied-droit, comme elle se transmettait au point a de l'extrados, quand il n'y avait pas de pied-droit. En effet, si l'on imagine au point C deux forces, l'une verticale de bas en haut et égale au poids de la demi-voûte réuni à celui du pied-droit, l'autre horizontale, de dehors en dedans, et égale à la poussée du coin; il est clair que le système des forces sera en équilibre. La

force verticale est constante, mais la force horizontale est variable et dépend du coin; c'est cette force variable qui tend à renverser le pied-droit dans presque tous les cas; je ne dis pas toujours, parce qu'en effet il peut arriver que le pied-droit soit renversé par une force plus petite : ceci mérite d'être éclairci.

La plus grande poussée que je représente par F, est bien la force qui tend à faire glisser le pied-droit; mais s'il existe une autre force ou poussée horizontale F′ qui, sans être aussi grande que F, ait néanmoins un plus grand moment relativement à ceux des trois forces verticales qui tendent à faire tourner en sens contraire, ce sera F′ qui, agissant avec plus d'avantage, renversera le pied-droit. Ces deux effets, le glissement et le mouvement de rotation autour du point C, sont entièrement indépendans; le premier est produit par la force F, le second par F′. Si l'on calculait Z de manière à mettre le pied-droit en équilibre avec le coin qui a produit F, il n'en serait pas moins renversé par la force F′ provenant d'un coin de moindre poussée, mais qui agit plus favorablement. Quant à ce second coin qui produit F′ et qu'il n'est pas moins essentiel de connaître, on l'obtiendra en cherchant le *maximum* de Z dans l'équation d'équilibre de rotation, en y faisant varier α : cela est encore fondé sur ce principe, que la pesanteur qui tend toujours à produire le plus grand effet possible, doit, pour le renversement, employer le coin le plus favorable.

Ainsi, le coin de plus grande poussée opère le mouvement horizontal ou le glissement, et cependant il existe ou peut exister un autre coin qui rende Z *maximum* et opère le renversement. Voilà deux principes qui donnent deux valeurs différentes pour Z, si on les emploie isolément à la détermination de α. On sent néanmoins que le problème ne peut avoir qu'une solution : on concilie les deux principes de la manière suivante.

C'est bien toujours la plus grande poussée F qui opère le glissement : je dis de plus à présent qu'elle opère aussi le renversement, et voici comment il faut concevoir la chose. La force F, qui n'opérerait pas le renversement si elle agissait sur le joint du coin dont elle émane, se transmet à un autre joint qui doit être celui par lequel elle peut renverser le plus large pied-droit. Ce troisième joint dont j'appelle α', *l'angle*, doit donc rendre Z un *maximum*,

mais en regardant F comme constant. Il faut imaginer quatre joints de rupture symétriquement placés, savoir, deux dans chaque moitié de la voûte : le coin compris ordinairement entre les deux joints les plus élevés, produit la plus grande poussée ou Z ; cette force n'agit pas dans ces deux joints, elle se transmet aux deux qui sont inférieurs, contre lesquels elle opère, avec le plus grand avantage possible, le renversement des pieds-droits.

J'ai dit que la plus grande poussée se transmet toute entière au point C ; ensorte que si l'on appliquait en ce point deux forces, l'une verticale et égale au poids de la demi-voûte augmenté du pied-droit, l'autre horizontale, dirigée suivant CD, et égale à la plus grande poussée, le système serait en équilibre : mais si l'on appliquait à la clef une force horizontale et égale à la plus grande poussée, l'équilibre subsisterait encore. Il suit de là que non-seulement la plus grande poussée se transmet au point C, mais encore qu'elle réagit sur la clef et y opère une pression égale. Les mêmes raisonnemens prouvent que la plus grande poussée est une force constante qui de proche en proche se transmet à tous les voussoirs sans rien perdre de son intensité. En quelque point M qu'on la suppose appliquée, il faut toujours que son moment à l'égard du point C, soit égal au moment de la partie supérieure M, qui repose en ce point plus à celui de la partie inférieure N augmentée du pied-droit. La question est réduite à savoir quel est ce point qui facilite le plus le renversement ou qui exige le *maximum* de Z.

Tels sont les principes de la théorie que j'ai développée dans les articles suivans, et qui bannit l'arbitraire dans la position du joint de rupture. La règle de pratique suivie jusqu'ici n'était fondée sur aucun principe ; elle ne pouvait pas même être déterminée par l'expérience, à cause du nombre et de la variation des élémens qui déterminent la position des joints de rupture.

Dans ce qui précède, je n'ai point considéré le frottement : il faudra examiner les modifications qui en résultent ; c'est ce que je vais faire dans les articles suivans, en distinguant toujours les quatre espèces de voûtes.

Enfin, après avoir trouvé les formules dans la double hypothèse du coin avec ou sans frottement, il faudra chercher dans l'hypothèse

des arcs-boutans, quel est le joint qui produit le plus grand effet et la plus grande poussée horizontale en C. La valeur de Z qui en résultera sera encore un *maximum*. Si elle surpasse le *maximum* donné par l'hypothèse du coin, il faudra la préférer ; car la pesanteur produira trois joints de rupture, savoir, un à la clef et les deux autres symétriquement placés, plutôt que deux seulement, si ce mode de rupture doit lui faire produire un plus grand effet.

En étendant ce principe, on serait conduit à supposer cinq joints de rupture plutôt que trois ; mais on sent que les difficultés du calcul surpasseraient bientôt les forces de l'analyse ; d'ailleurs je ferai voir qu'il n'y a réellement que deux hypothèses.

26. *Formules générales dans l'hypothèse du coin avec frottement.* Je vais appliquer les principes du numéro précédent à la recherche des formules générales, lorsqu'on a égard au frottement.

En comparant la fig. 13 avec la fig. 20, on voit que le cas d'équilibre traité dans le n° 21, est précisément celui d'une voûte dont la partie EFF'E' agit comme un coin pour renverser le reste de la voûte, supposé adhérent au pied-droit. Je rappelle ici la notation que je conserverai toujours, à moins que je n'avertisse du contraire.

Je fais (fig. 20), $AO = b$, $OS = a$, $SS' = k$, $OR' = q$, $RR' = h$, $OG' = D$, $AD = H$, $DC = Z$, $SS'FE = M$, $EFaA = N$, $M + N = S$, $SP = x$, $PE = y$, $SE = s$, $\alpha =$ angle du joint quelconque EF avec la verticale ; $R =$ rayon de courbure du point E ; $r =$ rayon de courbure de l'intrados au point S ; $m = 3{,}1416 = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$; $\pi = \frac{\text{frottement}}{\text{pression}}$; $\theta =$ angle du frottement, ou tang $\theta = \pi$; $F =$ poussée horizontale produite en R par le coin ; et (fig. 25) $O\alpha = a + \frac{1}{2}k = a'$; $O6 = b'$; $AR' = D'$; $6R' = h'$; $Aa = K$; $f =$ densité du pied-droit.

Cela posé, en comparant les quantités analogues et correspondantes du n° 21 avec les données précédentes, on reconnaîtra qu'il faut substituer dans l'équation (17) du n° 21, $(H + h)$ pour H_1 ; la quantité $(b + Z - q)$ pour Z_1, et pour NG moment du massif, la

somme $N(b+Z-D)+\frac{1}{2}fHZ^2$ des momens du pied-droit et de la portion de voûte adhérente.

Par ces substitutions dans les équations (17), on a pour les formules de l'équilibre de rotation et du non-glissement des pieds-droits,

$$\left.\begin{array}{l}(H+h)F+Mq+ND=bS+SZ+\frac{1}{2}fHZ^2\ldots\\ F<\pi(S+fHZ)\ldots\ldots\end{array}\right\}\ldots\ldots(22).$$

En supprimant le terme fHZ, on a la condition du non-glissement de la voûte sur le pied-droit.

Remarquons d'abord que les équations (22) reviennent au même, quand $\pi=0$, que les équations (18) et (19) du n° 22, ainsi que cela devait être.

Pour passer à la discussion des équations (22), il faut préalablement rappeler quelques principes. Le frottement absorbe une partie de la poussée horizontale qu'un coin quelconque produirait sans cette résistance : il opère un effet de plus; il change la grandeur du coin de plus grande poussée et celle du coin du plus grand renversement; mais cela n'empêche pas que les choses ne se passent comme nous l'avons exposé dans l'article précédent.

Observons d'abord que l'équation (22) est censée ne renfermer d'autres variables que α et Z, puisque M, N, q, D, h sont des fonctions de α données par l'équation de l'intrados.

La première chose à faire, c'est de chercher l'angle α du joint de plus grande poussée : il faut pour cela employer l'équation

$$dF=0 \quad \text{ou} \quad (\text{n}^\circ\ 21), \quad d.M\cot(\alpha+\theta)=0\ldots\ldots(23).$$

La seconde opération consiste à chercher le *maximum* de Z. Si on substituait la valeur de α dans l'équation (22), la valeur de Z qu'on en tirerait, ne serait pas un *maximum* ou pourrait n'en être pas un, quoiqu'elle correspondît au *maximum* de la poussée : ce ne serait qu'une première valeur approchée de Z.

Si on égalait à zéro la différentielle de la valeur de Z donnée par l'équation (22), on aurait, après avoir éliminé α, une autre valeur de Z qui serait un *maximum*, mais qui ne correspondrait pas au *maximum* de la poussée; on aurait une seconde valeur plus approchée pour Z.

Enfin, on aura le vrai *maximum* cherché de Z, en observant qu'il s'agit de trouver le point d'application dans lequel la force constante F s'exerce avec le plus d'avantage contre le pied-droit. Or, Z sera un *maximum* si le premier membre de l'équation (22) en est un; car si on fait $dz = 0$ dans le second membre, il s'anéantit. De plus il suffit, pour que ce premier membre soit un *maximum*, qu'on ait l'équation

$$Fdh + d(Mq) + d(ND) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (24),$$

puisque F est constant. Substituant dans l'équation (22) la valeur de α donnée par l'équation (24), on aura le *maximum* cherché de Z, c'est-à-dire la vraie solution, la plus rigoureuse qu'on puisse desirer, puisqu'elle remplit la double condition de procurer le *maximum* de F et celui de Z.

La solution rigoureuse comprend, comme on voit, deux parties, savoir : 1° trouver F par l'équation (23); 2° trouver Z par les équations (24) et (22).

Pression. Il est essentiel dans la science de la construction, de savoir quelle pression éprouve chaque voussoir, afin d'en conclure s'il pourra supporter, sans en être écrasé, la pression trouvée par le calcul.

Nous avons vu (n° 21) que lorsqu'un coin repose entre deux plans inclinés fixes, la pression qui a lieu dans le contact est $\frac{M}{\sin\alpha + \pi \cos\alpha}$: cela n'a plus lieu dans la voûte, parce que la pression n'est pas toujours l'effet du coin supérieur, mais quelquefois celui de la partie inférieure de la voûte. Si l'on appliquait deux forces au joint des naissances, l'une verticale et égale au poids de la demi-voûte, l'autre horizontale et égale à la plus grande poussée F; si en même temps on appliquait à la clef une force horizontale = F; il est évident que la demi-voûte serait en équilibre avec ces trois forces. On voit, comme je l'ai déjà dit, que la poussée réagit contre tous les voussoirs, et qu'il en est de même de la force verticale et égale à S dont je viens de parler. Il suit de là que chaque joint est sollicité à la fois par deux forces, l'une F horizontale, l'autre M verticale = poids des voussoirs supérieurs, ainsi que par deux autres égales et directement opposées, d'où résulte l'équilibre et la pression.

pression. Il faut calculer l'effet des forces F et M perpendiculairement au joint : la somme des deux pressions partielles sera la pression totale et cherchée P.

La pression partielle produite par F sera $F \cos \alpha$; celle provenant de M sera $M \sin \alpha$: on aura donc la somme

$$F \cos \alpha + M \sin \alpha = P \ldots\ldots\ldots (25).$$

Cette formule, en y mettant pour F et M leurs valeurs, fera connaître la pression P qu'éprouve un joint quelconque : elle fait voir que cette pression est F pour la clef et S pour le voussoir des naissances, si la ligne des naissances est horizontale.

La pression P est, comme on voit, variable pour chaque joint ; cela donne lieu à un problème curieux et utile, celui de savoir quel est le joint pour lequel P est un *maximum*, et quelle est alors la valeur de P.

On trouvera l'angle α du joint en question, en égalant à zéro la différentielle de la valeur de P, prise en regardant F comme constant, et en y mettant pour M sa valeur donnée en fonction de α, par la figure de la voûte, et l'on aura

$$M \cot \alpha - F + \frac{dM}{d\alpha} = 0 \ldots\ldots\ldots (25').$$

Ayant trouvé α par l'équation (25'), et ayant substitué sa valeur dans l'équation (25), on aura le *maximum* de pression P.

27. *Formules dans l'hypothèse des arcs-boutans.* J'ai dit qu'après avoir cherché Z dans l'hypothèse du coin avec frottement, il fallait la chercher dans celle des arcs-boutans : deux principes qui ont servi de base à la première recherche, s'appliquent encore à la seconde. 1°. Il faut trouver l'arc qui s'appuyant d'une part à la clef sur l'extrados, et d'autre part par son extrémité inférieure sur l'intrados, exerce la plus grande poussée. 2°. Cette poussée se transmettant et réagissant dans tous les voussoirs, il faut trouver le point d'application où elle produira le plus grand effet, c'est-à-dire le *maximum* de Z. Ainsi on doit avoir, comme dans l'hypothèse du coin avec frottement, $dZ = 0$ et $dF = 0$.

Il est évident, en reprenant l'équation (20) du n° 23, qu'on a

$$F = \frac{Ml}{a+k-h} \ldots\ldots\ldots (26).$$

On remplira donc la condition $dF = 0$ par l'équation suivante

$$d\left(\frac{Ml}{a+k-h}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots (27).$$

Quant à la seconde condition $dZ = 0$, on observera, comme dans le numéro précédent, qu'en cherchant le *maximum* de Z, il faut faire F constant. On verra ensuite que l'équation (20) est la même que l'équation (22), avec cette différence seulement que la lettre F, qui dans les deux hypothèses représente le *maximum* de la poussée, n'a pas la même valeur dans toutes deux, quoiqu'elle soit constante dans les deux cas.

La marche à suivre dans l'hypothèse actuelle est donc la même que dans la précédente, ainsi que la formule des équations. Seulement il faut observer que le plus souvent la valeur de F sera ici un peu plus difficile à trouver, et que de plus le frottement n'entre pour rien dans le calcul.

Formules d'approximation.

28. Dans les deux numéros précédens, j'ai donné les moyens d'approcher de la vraie valeur de Z, autant que la nature du problème paraît le comporter. Les calculs à faire peuvent paraître longs et même surpasser la portée de la plupart des Architectes. Je vais essayer, dans cet article, de donner des formules d'une application plus facile et suffisantes pour les besoins de la pratique, sauf à recourir aux articles précédens, quand on aspirera à plus de précision.

Je reprends l'équation (22) que je mets sous la forme suivante, qu'on verra revenir au même, en retournant à la notation convenue.

$$(H+h')F+(h-h')F-M(b-q+D')-N(b-D+D')$$
$$= S(Z-D'+\tfrac{1}{2}fHZ^2 \ldots\ldots\ldots (a).$$

Maintenant je remarque que le terme $(h-h')F$ exprime le moment de la poussée F pour faire tourner (fig. 20) et (fig. 25),

la partie de voûte EFaA, autour du point $\mathfrak{C}$, du joint des naissances ; que le terme $-M(b-q+D')$ est le moment de l'aire SSFE, et le terme $-N(b-D+D')$ celui de l'aire EFaA pour faire tourner autour du même point en sens contraire. Si les deux derniers momens ne l'emportaient pas sur le premier, l'équilibre serait détruit, et la voûte renversée ; donc les deux momens qui ont le signe moins, surpassent le premier qui est positif : or la variation de Z ne dépend que de celle des trois termes ci-dessus ; donc Z sera un *maximum* quand la somme de ces trois termes sera un *minimum*, c'est-à-dire zéro.

Au reste cette conclusion n'est vraie qu'en négligeant l'effet du ciment qui peut rendre une partie de la voûte adhérente à un certain point aux pieds-droits : c'est pour cela que la conclusion que j'ai tirée n'est qu'une approximation.

Je fais donc égale à zéro la somme des trois momens ci-dessus ; ce qui réduit l'équation (a) à la suivante :

$$(H+h')\,F=S\,(Z-D')+\tfrac{1}{2}fHZ^2\ldots\ldots(b).$$

Nous serions arrivés à cette dernière équation par le raisonnement suivant : Si l'on appliquait au point $\mathfrak{C}$ deux forces, l'une verticale $=S$, l'autre horizontale $=F$, la voûte serait en équilibre : donc la voûte reproduit en sens contraire contre le pied-droit auquel elle tient par le frottement, les deux forces ci-dessus. Si on égale le moment de F autour du point C, à celui de S augmenté de celui du pied-droit, on retrouve l'équation (b).

On aperçoit que le second principe qui nous a fait trouver l'équation (b), n'est autre chose que l'hypothèse des deux arcs-boutans embrassant chacun la demi-voûte. Ainsi les deux hypothèses rentrent l'une dans l'autre, quand on fait la somme des trois momens ci-dessus égale à zéro.

Cette même supposition donne la valeur de F : en effet, elle exprime l'état d'équilibre de la voûte : cet équilibre doit donc avoir lieu quand la poussée est appliquée à la clef. Or, à la clef on a $M=o$, $N=S$; égalant à zéro les trois momens pour ce point, on a

$$F=\frac{b-D+D'}{a+\frac{1}{2}k-h'}\ldots\ldots\ldots\ldots(c),$$

en observant qu'alors $h=a+\frac{1}{2}k$.

Il ne reste plus qu'à substituer cette valeur de F dans l'équation (*b*); mais il y a quelques observations à faire : cette valeur de F n'est pas sa vraie valeur, mais seulement la limite qu'elle ne peut excéder; car cette vraie valeur peut être moindre sans qu'il y ait renversement. C'est ce qui arrive quand la somme des trois momens dont nous avons parlé est négative. Par exemple, si l'extrados est une ligne droite horizontale, on a $a + \frac{1}{2} k - h = 0$, d'où F infinie. Il suit de là que la limite trouvée pour F s'écarte trop de la vérité, quand la voûte est très-aplatie. Nous allons chercher une autre limite qui, combinée avec la première, donnera toujours un résultat suffisamment exact.

J'ai déjà dit que sans le frottement et l'adhérence, toutes les voûtes non-équilibrées s'écrouleraient : voyons leurs effets sur la poussée.

On a $F = M \cot(\alpha + \theta)$; quand $\theta = 0$, on a $F = M \cot \alpha$, et à la clef, dans les voûtes de première espèce, $F = dM . d \cot \alpha = \frac{0}{0}$, quantité finie. La valeur de F est souvent si grande alors, qu'elle renverserait la voûte sur le pied-droit, comme nous le verrons dans le berceau circulaire. Le frottement seul s'y oppose; car quand θ n'est pas zéro, on a à la clef $F = 0$. Le *maximum* de F n'a plus lieu en ce point; il s'en éloigne suivant la nature de la voûte et la grandeur du frottement : on explique par là pourquoi les voûtes non équilibrées ne sont pas toutes renversées.

Dans les voûtes de la seconde espèce, le *maximum* de F aurait lieu aux naissances sans le frottement, et la partie supérieure de la voûte serait expulsée par la réaction des voussoirs inférieurs. Le frottement fait remonter le joint de plus grande poussée, et en diminuant la valeur de F, il empêche l'expulsion de bas en haut des voussoirs supérieurs.

Comme l'expression de la poussée est différente dans les quatre espèces de voûte, il est utile de savoir distinguer à laquelle des quatre espèces un berceau proposé appartient.

Il faut concevoir qu'on ait construit sur la même épaisseur *k* de la clef, un extrados qui rendît la voûte équilibrée : s'il embrasse l'extrados proposé, le berceau est de la première espèce; s'il en est embrassé, le berceau est de la seconde espèce; si les deux extrados

se confondent, le berceau est évidemment équilibré : enfin, s'ils se coupent, le berceau est de la quatrième espèce. On a un exemple de cette quatrième espèce, lorsque l'intrados est circulaire et que l'extrados étant parabolique, s'éloigne depuis la clef.

Dans la première espèce, quand on néglige le frottement, la valeur de F est facile à trouver. En effet, on a $\theta = 0$; $F = M \cot \alpha$; $dF = d(M \cot \alpha = \frac{0}{0} = \frac{dM}{d.\text{tang}\,\alpha}$. Mais on a $dM = \frac{kds}{2r}(2r + k)$; $d.\text{tang}\,\alpha = d\left(\frac{dx}{dy}\right)$ et r, dont l'expression générale est $\frac{ds^2}{dy^2 d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$;

devient, quand $ds = dy$, $r = \frac{ds}{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}$; ce qui donne

$$\frac{dM}{d\,\text{tang}\,\alpha} = kr + \tfrac{1}{2}k^2 = F \ldots\ldots\ldots\ldots (d).$$

C'est une autre limite de F dans la première espèce de voûte, puisque le frottement a été négligé. La limite analogue pour la seconde espèce est $F = S \cot \alpha$, en entendant ici par α l'angle du joint des naissances.

En résumant tout ce qui a été dit dans cet article, on trouve les formules suivantes.

Formules pour la première espèce de berceaux.

$$\left.\begin{array}{l} S(H + h')\dfrac{b - D + D'}{a + \frac{1}{2}k - h'} = S(Z - D') + \frac{1}{2}fHZ^2 \ldots \\ k(r + \frac{1}{2}k)(H + h') = SZ + \frac{1}{2}fHZ^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S\dfrac{b - D + D'}{a + \frac{1}{2}k - h'}, \text{ ou } (kr + \frac{1}{2}k^2) < \pi(S + fHZ) \ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (28).$$

On emploiera la première des trois équations plutôt que la seconde. Si $\frac{b - D + D'}{a + \frac{1}{2}k - h'} S < kr + \frac{1}{2}k^2$; *et vice-versâ* : cela est fondé sur ce que la plus petite des deux limites de F est la plus proche de la vraie valeur.

La troisième équation exprime la condition du non-glissement des pieds-droits sur leur plate-forme : on choisira aussi la première

expression du premier membre de l'inégalité, quand on fera usage de la première équation pour déterminer Z.

Enfin, si la voûte est très-aplatie, on fera $h' = o$, $D' = o$ dans la première, si elle doit être employée, parce que le mouvement de rotation se fait autour du point A.

Formules pour les berceaux de la seconde espèce.

$$\left.\begin{array}{l} S(H+h')\dfrac{b-D+D'}{a+\frac{1}{2}k-h'} = S(Z-D') + \frac{1}{2}fHZ^2 \ldots \\ S\cot\alpha\,(H+h') = S(Z-D') + \frac{1}{2}fHZ^2 \ldots\ldots\ldots \\ S\dfrac{b-D+D'}{a+\frac{1}{2}k-h'},\ \text{ou } S\cot\alpha < \pi(S+fHZ)\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ldots\ldots(29).$$

Il faut faire la même distinction que ci-dessus pour le choix entre la première et la seconde.

Observations. Tout ce que j'ai dit dans l'article précédent s'applique également aux voûtes équilibrées. Cependant lorsque l'épaisseur est très-petite, ou que les poids des voussoirs sont supposés concentrés sur l'intrados, il n'y a plus lieu de chercher le point d'application de la poussée F pour rendre Z un *maximum*, parce que la somme des trois momens dont j'ai parlé pour faire tourner la demi-voûte autour du point $\mathfrak{C}$, est une quantité constante qui devient zéro quand on y fait $F = c$ (*voyez* n° 24). Ainsi, pour les voûtes équilibrées, on peut prendre pour formules d'approximation, celles du n° 24.

Quant aux voûtes de la quatrième espèce, on pourra employer celles rapportées ci-dessus pour la première et la seconde espèce.

Il est encore une observation générale à faire. Il n'existe de *maximum* pour Z, c'est-à-dire un point d'application plus favorable à la poussée, que dans l'hypothèse où l'on suppose une partie de la voûte adhérente au pied-droit ; mais quand on considère la demi-voûte comme ne formant qu'une seule pièce, le point d'application est indifféremment à la clef ou aux naissances. Il vaut mieux choisir ce dernier point, ainsi que je l'ai fait, parce que l'équation d'équilibre est plus simple qu'elle ne le serait en choisissant la clef.

Récapitulation. La première chose à faire, c'est de connaître la valeur de θ ou la grandeur du frottement. Dans les pierres de taille, le rapport π du frottement à la pression, est environ $\frac{1}{2}$; mais comme dans la construction il peut se glisser du sable entre les voussoirs, ce qui diminue le frottement, il sera plus convenable, et en même temps plus prudent de faire $\pi = \frac{1}{3}$, valeur qui convient aux corps passablement polis : cela donne $\theta = 18°26'$ nonagésimaux.

Substituant cette valeur de θ dans l'équation (23), ainsi que celle de M donnée en fonction de α par l'équation d'intrados, on aura la valeur de α qui détermine le joint de plus grande poussée. Remettant cette valeur de α dans l'équation (23), on aura celle de F. Enfin mettant dans l'équation (24) la valeur de F et celle de S donnée par la figure de la voûte, on aura Z.

Il faut observer que la valeur de F est aussi celle de la pression qui a lieu à la clef, chose essentielle à connaître, puisque c'est par elle qu'on saura si la pierre dont la résistance est censée connue par l'expérience, peut soutenir, sans s'écraser, la pression qu'elle éprouve à la clef. Quant à celle qui a lieu aux naissances et à la base du pied-droit, elle n'est autre chose, dans le premier point, que le poids de la demi-voûte; et dans le second, celui de la demi-voûte augmenté du pied-droit. C'est faute d'avoir calculé cette pression que les colonnes du Panthéon-Français se sont écrasées dans leur circonférence, ce qui les a fait affaisser. Enfin il faudra chercher par la formule (25'), la position du joint qui éprouve le *maximum* de pression et la valeur de ce *maximum*, afin de connaître la plus grande pression qu'aura à supporter le voussoir le plus pressé.

Après avoir trouvé le *maximum* de Z dans l'hypothèse du coin avec frottement, on pourra le chercher dans celle des arcs-boutans du n° 23. Pour cela, on emploiera le procédé du n° 27. On choisira alors le plus grand des deux *maxima* de Z fournis par les deux hypothèses.

Si la voûte est très-surbaissée, l'hypothèse des arcs-boutans pourra donner le plus grand des deux *maxima*. M. Perronnet a observé que dans les grandes arches très-surbaissées, il se faisait

trois ruptures, la première à l'intrados de la clef, les deux autres près des naissances à l'extrados.

Il est en effet difficile de concevoir que les pieds-droits puissent éprouver le plus petit mouvement de rotation, sans que la voûte s'ouvre à la clef. Dans l'hypothèse du coin sans frottement, on est obligé de supposer dans le contact des deux joints de rupture un petit globule mouvant par lequel se transmet la poussée. Hors ce cas, on ne peut se dispenser d'admettre le frottement, ou bien il faut renoncer à l'hypothèse du coin.

Dans la section suivante, les applications que je ferai acheveront d'éclaircir la théorie. Je terminerai celle-ci par une remarque importante; c'est qu'il n'y a réellement que deux hypothèses, celle du coin et celle des arcs-boutans. En effet, si on suppose un nombre pair de joints de rupture, il n'y en aura point à la clef; deux joints symétriquement placés, formeront toujours un coin; un de ces coins sera celui de plus grande poussée; cette plus grande poussée sera celle qui se transmettra au centre de rotation du pied-droit et qui réagira à la clef; il faudra ensuite chercher son point d'application le plus favorable pour avoir Z : c'est précisément en quoi consiste ma théorie.

Si on suppose un nombre impair de joints de rupture, il s'en trouvera un à la clef. Chaque moitié de voûte sera partagée en arcs-boutans. La poussée qui aura lieu dans un point de rupture pourra être regardée comme provenant de la réunion des arcs supérieurs dont le plus élevé butte à la clef. Il existera un *maximum* de poussée qui sera encore celui qui opère le renversement. Il faudra ensuite chercher son point d'application, puisque cette poussée se transmet et réagit dans tous les points : on aura ainsi le *maximum* de Z. Il est donc vrai qu'il n'existe, comme je l'ai dit, que deux hypothèses différentes. Il ne doit pas paraître moins évident que le renversement se fera par celle des deux qui offrira le plus de facilité à la force de la pesanteur.

Au reste tout ce que je viens d'exposer dans cet article suppose qu'on peut trouver la vraie valeur de Z; mais il faudrait pour cela que le ciment fût susceptible d'appréciation, et que l'action du frottement fût bien connue; comme rien de tout cela n'a lieu, il s'ensuit qu'il faut renoncer à trouver la vraie valeur de Z, et se contenter

contenter de la limite fournie par l'équation (28) ou (29), et par celles des nos 26 et 27.

Dans le n° 28, la demi-voûte est censée agir d'une seule pièce; dans les articles 26 et 27, on a supposé que la poussée provenait du coin ou de l'arc capable d'exercer la plus grande, et de plus, que la voûte s'ouvrait dans le joint qui favorise le plus le renversement, tandis que la partie inférieure restait adhérente au pied-droit : ce ne sont là que des hypothèses que beaucoup de causes accidentelles peuvent détruire; elles ont toujours l'avantage de bannir l'arbitraire dans la position du joint de rupture et de fournir des limites de Z suffisantes pour la pratique.

SECTION IV.

Applications à différentes espèces de voûtes.

29. *Berceau cylindrique.* Comme dans les hypothèses des arcs-boutans et de la Hyre, on a besoin de connaître le centre de gravité d'une partie de la voûte dont je suppose ici l'épaisseur constante, je commence par ce problème préliminaire.

Il s'agit de trouver la position du centre de gravité d'un espace ou portion de couronne circulaire EFaA (fig. 23) formé par deux arcs de cercle concentriques et par deux portions de rayon.

J'imagine cet espace décomposé en trapèzes infiniment petits, tels que AA$'d'a$. Les centres d'inertie de tous ces petits trapèzes seront placés sur un arc de cercle KL qui sera également chargé partout du poids de ces trapèzes. La question sera réduite à trouver le centre d'inertie G de cet arc KL, lequel doit être placé sur le rayon OR qui divise en deux également l'angle O.

Soit AO $= b$, A$a = k$, angle AOE $= \mathcal{C}$: on trouve aisément que $a\text{K} = \frac{1}{3}k\frac{3b+k}{2b+k}$. On sait ensuite que $\text{OG} = \frac{\text{OR . KL}}{\text{arc KRL}}$; mais $\mathcal{C}$ étant exprimée en parties du rayon 1, on a arc KRL $= \mathcal{C}$.OR; de plus, KL $= 2\sin\frac{1}{2}\mathcal{C}$.OR et O$g'$ = OG.cos $\frac{1}{2}\mathcal{C}$. On déduit aisément de ces valeurs, $\text{O}g' = \frac{2}{3}\sin\mathcal{C}\,\frac{3b^2+3bk+k^2}{\mathcal{C}(2b+k)} = \text{D}$.

Quand la couronne est d'un quadrant, comme dans la (fig. 22), on a $\sin \beta = 1$; $\beta = 1{,}5708$ et $D = \frac{2}{3}\,\frac{3b^2 + 3bk + k^2}{\frac{1}{2}m\,(2b+k)}$.

Cette valeur de D servira à faire usage de l'hypothèse du coin de la Hyre et de celle des arcs-boutans.

On déduit aisément de la valeur de D, en observant que $\beta = 90^\circ - \alpha$, l'expression de $l = EL$ (fig. 21), employée dans l'hypothèse des arcs-boutans du n° 23, et l'on trouve

$$l = b \sin \alpha - \frac{2}{3}(1 - \cos \alpha)\,\frac{3b^2 + 3bk + k^2}{\alpha\,(2b + k)}.$$

En substituant la valeur de D dans l'équation (18) du n° 22, ainsi que $(b + \frac{1}{2}k)\cos \alpha$ pour h, et 1 pour f, on a la formule suivante qui dispense de chercher le centre de gravité dans l'hypothèse du coin sans frottement. J'ai fait pour abréger,

$$b + \tfrac{1}{2}k = b'; \ 3{,}1416 = m;$$

$$Z = -\frac{2mkb'}{4H} + \sqrt{2kb'\alpha.\cot\alpha + \frac{2k^2b'^2\alpha}{H\sin\alpha} - \frac{mbkb'}{H} + \frac{2k\cos\alpha}{3H}(3b^2+3bk+k^2) + \frac{m^2k^2b'^2}{4H^2}} \ \ldots\ldots \quad (a).$$

Il faut calculer α en partie du rayon 1, et non en degrés. Si l'on fait $\alpha = 45^\circ = 0{,}7854 = \frac{1}{4}m$, on a $\sin \alpha = 0.707$; c'est l'hypothèse de la Hyre.

Si l'on applique au berceau cylindrique les réflexions des n°s 25 et 26, on reconnaît qu'il est de la première espèce : d'ailleurs l'expression $\frac{M}{\operatorname{tang}\alpha}$ qui est ici $\frac{\alpha k\,(b + \frac{1}{2}k)}{\operatorname{tang}\alpha}$, fait voir évidemment qu'elle devient un *maximum* à la clef où $\alpha = \operatorname{tang}\alpha$, résultat conforme.

Si l'on veut avoir la valeur de Z dans l'hypothèse du coin sans frottement, auquel cas le *maximum* de poussée a lieu à la clef, on aura $M = 0$; $N = S = \frac{1}{2}mk\,(b + \frac{1}{2}k)$; $F = k\,(b + \frac{1}{2}k)$; $h = (b + \frac{1}{2}k)$; $q = 0$, et pour D la valeur trouvée ci-dessus pour le cas du quart de cercle. Substituant dans l'équation (22) ou (28), et faisant, pour

abréger, $b + \frac{1}{2} k = b'$, on a la suivante

$$Z = -\frac{mb'k}{2fH} + \sqrt{\frac{m^2 b'^2 k^2}{4f^2 H^2} + \frac{k}{fH}(0,8584' b^2 + \tfrac{1}{2} mb'k + 2b'H + \tfrac{1}{6} k^2)} \ldots \ldots (b).$$

On retrouve cette même équation en faisant dans l'équation (a), $\alpha = 0$, comme cela doit être à la clef. Au reste cette équation (b) ne donne que la plus grande limite de la valeur de Z, puisqu'elle suppose le frottement nul, ce qui est faux.

On prouverait que, quand le frottement est nul, c'est à la clef qu'on a à la fois le *maximum* de poussée, le *maximum* de Z en faisant varier la poussée, ou en la regardant comme constante; mais cette considération n'est que de pure curiosité.

Si d'après la valeur de $F = k(b + \frac{1}{2} k)$, on cherche par l'équation (17) la condition d'équilibre entre la clef et la demi-voûte, on trouve $k = 0,8218b$. Ce résultat fait voir, que sans le frottement, il faudrait que l'épaisseur k fût presque égale au rayon b, pour que la clef ne renversât pas la demi-voûte sur le pied-droit, en la supposant même d'une seule pièce. Mais le frottement rend la poussée nulle à la clef, et s'il ÿ existe une pression, elle n'est que l'effet de la réaction des autres voussoirs.

Si on veut employer l'hypothèse de deux arcs-boutans embrassant chacun la demi-voûte, on a les formules suivantes pour l'équilibre de rotation et la condition du non-glissement des pieds-droits,

$$\left.\begin{array}{l} 0,2854k(b + \frac{1}{2} k)\,H = 0,7854k(b + \frac{1}{2} k)\,Z + fHZ^2 \ldots \\ 0,2854\,(b + \frac{1}{2} k) < \pi(0,7854k(b + \frac{1}{2} k) + 2fHZ) \ldots \end{array}\right\} \ldots (c).$$

Je n'ai rapporté ce qui précède que pour donner un exemple de la manière de se conduire pour discuter une voûte dans les différentes hypothèses. Je passe maintenant à l'application de mes formules (23) et (28) des n°s 26 et 28, qui me paraissent préférables à tous égards.

L'équation (23) qui est $F = M \cot(\theta + \alpha)$ devient ici $F = k(b + \frac{1}{2} k)\,\alpha \cot(\theta + \alpha)$; on a $\theta = 18^\circ\,26'$: on peut chercher le *maximum* de F, soit par le tâtonnement, soit par l'équation $\alpha = \sin(\theta + \alpha)\cos(\theta + \alpha)$, à laquelle on arrive en égalant à

zéro la différentielle de F : on trouve $\alpha = 29°$ environ ; c'est l'angle qui donne le coin de la plus grande poussée. La valeur de F devient $F = 0,4649k(b + \frac{1}{2}k)$. Faisant donc $S = 1,5708k(b + \frac{1}{2}k) = 1,5708b'k$; $F = 0,465b'k$; $h' = 0$, dans la première des équations (28), on aura les formules suivantes pour l'équilibre de rotation et le non-glissement des pieds-droits,

$$\left.\begin{array}{l} Z = -\frac{1,5708b'k}{fH} + \sqrt{\frac{(1,5708)b'^2k^2}{f^2H^2} + \frac{0,93b'k}{f} + \frac{6,2832b'kD'}{fH}} \cdots \\ 0,465b'k < \pi\,(1,5708b'k + fHZ) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (d).$$

On voit par la dernière qu'en faisant $\pi = \frac{1}{3}$, le pied-droit ne saurait glisser sur sa base ; on voit aussi, en supprimant le terme fHZ, que la voûte ne peut pas non plus glisser sur le pied-droit.

Je terminerai cet article par un exemple numérique. Soit $b = 30$; $H = 40$; $k = 1$.

Si l'on fait $\alpha = 45°$ (ce qui est l'hypothèse de la Hire) dans l'équation (a), elle donne $Z = 6,56$.

Si dans la même équation on fait $\alpha = 0$, ce qui est l'hypothèse du coin sans frottement, elle donne pour le *maximum* de Z, $Z = 7,94$; l'équation (b) aurait donné le même résultat.

Si l'on emploie l'équation (c), ce qui est l'hypothèse de deux arcs-boutans comprenant chacun la demi-voûte, on a $Z = 4,92$. Mais il faut observer que ce n'est pas l'arc-boutant de 90° qui donne la plus grande poussée; l'arc qui la donne est variable et long à trouver.

Si on fait usage de la formule (d), on a $Z = 4,48$.

Enfin par la formule (28) du n° 28, on trouve $Z = 5,10$.

Ce dernier résultat est celui qu'il faut préférer ; il donne la limite de la plus grande valeur de Z : si la formule de la Hire donne une valeur encore plus grande, c'est parce qu'elle est fausse ; c'est parce qu'elle ne tient pas compte du frottement : si on y a égard, on a un résultat plus faible.

30. *Berceau en demi-ellipse*. La figure 24 représente un demi-ber-

ceau elliptique qu'on a construit en traçant d'abord une ellipse $\alpha\beta$, et en lui menant ensuite deux courbes parallèles, à égale distance. Par cette construction, l'intrados et l'extrados ne sont point des ellipses, quoiqu'ils aient la même développée qu'elles.

Cette voûte est de la première espèce, et sans le frottement, la clef exercerait le *maximum* de poussée : cette résistance éloigne le *maximum* de ce point. Il faudra trouver F par l'équation (23), en observant qu'on a ici $M = ks$: ce calcul est assez long; on trouvera ensuite Z par l'équation (24).

Si l'ellipse est surbaissée, il vaudra mieux employer les formules (29) déduites de l'hypothèse des arcs-boutans. Si l'on veut éviter la longueur du calcul, on pourra supposer que le *maximum* de F a lieu aux naissances, ce qui donnera Z un peu trop petit. L'arc-boutant embrassant la demi-voûte, le calcul devient très-simple au moyen des tables ci-après. La première donne la distance D de la montée à la verticale passant par le centre de gravité du quart d'ellipse; la seconde fait connaître la longueur s de ce quart d'ellipse, et l'on a $S = ks$. Dans la première, $O\beta$ ou b' a été supposé $= 1$; dans la seconde, le demi-grand axe a été fait $= 1$.

On verra que dans l'hypothèse des arcs-boutans embrassant chacun la demi-voûte, l'équation (29) du n° 28 donne $F = \frac{ks(b-D)}{a+k}$. Ayant les valeurs de S, F, l'équation (29) devient

$$\left.\begin{array}{l} Z = -\frac{ks}{fH} + \sqrt{\frac{k^2s^2}{f^2H^2} + \frac{2F}{f} + \frac{2k^2s}{fH}} \ldots \\ F < \pi\,(ks + fHZ) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots (a).$$

Ces formules supposent que le centre de gravité de l'aire $SS'aA$ est le même que que celui du quart d'ellipse $\alpha\beta$: cela serait rigoureux, si l'ellipse passait par les centres partiels de gravité de tous les voussoirs; mais l'erreur est peu sensible; d'ailleurs il serait aisé de la corriger.

La valeur de Z donnée par la formule (*a*) sera un peu trop petite. On aura la plus grande limite en employant l'hypothèse du coin sans frottement, c'est-à-dire les équations (28) du n° 28, qui fourniront les formules suivantes, en observant qu'ici on a

$r = \frac{'b^2}{a'}$,

$$\left.\begin{array}{l} Z = -\frac{ks}{fH} + \sqrt{\frac{k^2s^2}{f^2H^2} + \frac{k}{f}\left(\frac{2'b^2}{a'} + k\right)} \ldots \\ \frac{k\,b'^2}{a'} + \frac{1}{2}k^2 < \pi\,(ks + fHZ) \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (b).$$

Supposons, pour faire une application des tables, $b=8$; $k=2$; $a=7$; d'où $a'=8$; $b'=9$.

Le b' de la table ayant été supposé $=1$, il faudra aussi faire le a' de la table $=\frac{8}{9}=0{,}8888$, pour avoir la valeur correspondante de D. Je prends dans la première table, la différence 0,0122 entre 0,6133 et 0,6255, nombres correspondans à 0,8 et 0,9, entre lesquels tombe 0,8888; puis je fais cette proportion 0,9 — 0,8 ou 0,1 : 0,9 — 0,8888 ou 0,0112 :: 0,0112 : un quatrième terme qu'on trouve être 0,0014; retranchant ce nombre de 0,6255, il vient 0,6241 qui étant multiplié par 9, donne 5,6169 pour la valeur de D.

En prenant de même des parties proportionnelles dans la seconde table, on trouvera $s = 13{,}363$. Il ne reste plus qu'à substituer les valeurs de D et s dans les formules ci-dessus.

Table pour la détermination du centre de gravité d'un quart d'ellipse, la demi-base b' *étant un.*

a' ou montée moyenne.	D ou distance OG'	a' ou montée moyenne.	D ou distance OG'.	a' ou montée moyenne.	D ou distance OG'.	a' ou montée moyenne	D ou distance OG'.
0,0	0,5000	0,7	0,5999	1,4	0,6720	2,1	0,7098
0,1	0,5055	0,8	0,6133	1,5	0,6788	2,2	0,7151
0,2	0,5198	0,9	0,6255	1,6	0,6851	2,3	0,7170
0,3	0,5365	1,0	0,6366	1,7	0,6910	2,4	0,7205
0,4	0,5534	1,1	0,6464	1,8	0,6963	2,5	0,7236
0,5	0,5698	1,2	0,6559	1,9	0,7014		
0,6	0,5854	1,3	0,6644	2,0	0,7057		

Table des longueurs des quarts d'ellipses dont le demi-grand axe est un.

Demi petit axe.	s ou longueur du quart d'ellipse.	Demi petit axe.	s ou longueur du quart d'ellipse.	Demi petit axe.	s ou longueur du quart d'ellipse.	Demi petit axe.	s ou longueur du quart d'ellipse.
0,00	1,0000	0,30	1,0967	0,60	1,2764	0,90	1,4953
0,05	1,0075	0,35	1,1227	0,65	1,3106	0,95	1,5318
0,10	1,0188	0,40	1,1506	0,70	1,3456	1,00	1,5708
0,15	1,0337	0,45	1,1802	0,75	1,3815		
0,20	1 0519	0,50	1,2110	0,80	1,4181		
0,25	1,0730	0,55	1,2433	0,85	1,4554		

31. *Berceau parabolique.* Supposons que la voûte représentée par la figure 25, soit formée d'une parabole $\alpha\mathcal{C}$, à laquelle on a mené de part et d'autre et à égale distance, deux courbes parallèles, pour avoir l'intrados et l'extrados qui ne seront pas des paraboles, quoiqu'ils aient la même développée qu'elle.

En faisant $O\alpha = a'$, $O\mathcal{C} = b'$, et conservant les autres notations; l'équation de la parabole $\alpha\mathcal{C}$ sera $y^2 = px = \frac{'b^2x}{a'}$: on aura $M = ks$; $\tang\alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$: donc $\frac{M}{\tang\alpha} = \frac{kps}{2y}$: la poussée horizontale sera un *maximum* quand $\frac{s}{y}$ en sera un, c'est-à-dire à l'infini sur la courbe : la voûte est donc de la seconde espèce, ainsi qu'on pouvait le déduire des principes des n°s 26 et 25.

Il faudra chercher F par l'équation (23) dans l'hypothèse du coin avec frottement, et par l'équation (27) du n° 27, dans l'hypothèse des arcs-boutans; je ne rapporte pas ces calculs auxquels on ne doit avoir recours que lorsqu'on aspire à beaucoup d'exactitude. Il sera suffisant pour l'ordinaire, de chercher F par l'équation (26) de la seconde hypothèse.

Ayant trouvé F, l'une ou l'autre des équations (29) et (28) donnera Z en y substituant les valeurs de D' et $S = ks$.

On a $D' = AR' = A\mathfrak{C} \sin \alpha = \frac{kdx}{2ds}$, qu'on trouve être $D' = \frac{a'k}{\sqrt{'b^2 + 4'a^2}}$; on pourra se contenter de faire $D' = \frac{1}{2}k$: on a aussi $s = \int \frac{dy}{p} \sqrt{p^2 + 4y^2}$, intégrale qu'on trouve être

$$\frac{y}{2p} \sqrt{p^2 + 4y^2} + \frac{p}{4} \log \frac{1}{p} (2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}),$$

et qui, en mettant b' pour y, et $\frac{'b^2}{a'}$ pour p, devient

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{'b^2 + 4'a^2} + \frac{'b^2}{4a'} \log \frac{1}{b'} (2a' + \sqrt{'b^2 + 4'a^2}).$$

Il faut se rappeler dans l'emploi de cette équation, de multiplier les logarithmes ordinaires des tables par 2,302585.

Si on veut avoir la limite de Z en négligeant le frottement, on prendra la valeur de F donnée par l'équation $F = S \cot \alpha$.

Pour avoir la pression P qu'éprouve un voussoir quelconque, on fera usage des équations (25), (25') du n° 26.

Après avoir rapporté les différentes formules propres à faire trouver Z, il faut toujours se souvenir que cette vraie valeur de Z est impossible à trouver, et qu'il n'y a rien de mieux à faire que d'adopter la limite donnée par les formules (29) : il faut appliquer cette conséquence aux voûtes dont je parlerai dans les articles suivans.

32. *Berceau en chaînette.* La figure 25 représente ici un berceau construit en menant à la chaînette $a\mathfrak{C}$ deux courbes parallèles. J'ai démontré dans les nos 13 et suivans, que ce berceau est équilibré ; ainsi les formules du n° 24 s'appliquent à la voûte proposée.

En conservant toujours les mêmes notations, on a ici $M = ks$, $\tan \alpha = \frac{dx}{dy} = \frac{s}{c}$ (*voyez* le n° 13). Le rayon de courbure de la chaînette

chaînette intermédiaire à la clef, ou $r=c$ (*voyez* le même numéro); et celui d'intrados $=r=c-\frac{1}{2}k$; $K=k$; $D'=\frac{1}{2}k\sin\alpha=\frac{1}{2}k\frac{dx}{ds}=\frac{ks}{2(a'+c)}$; $h'=\mathcal{C}R'=\frac{1}{2}k\frac{dy}{ds}=\frac{\frac{1}{2}kc}{a'+c}$; $s=\sqrt{'a^2+2a'c}$. Quant à la valeur de c, elle est donnée en fonction de a' et b', qui sont ici ce que a et b étaient dans le n° 13. Enfin, abstraction faite du frottement, on connaîtra toutes les quantités qui entrent dans les formules (21) du n° 24, ou dans ce cas $r=c-\frac{1}{2}k$. En faisant les substitutions dont j'ai parlé dans les formules du n° 24, elles deviennent

$$\left.\begin{array}{l}(h'+H)(s^2-'a^2)\frac{k}{a'}=2ks(Z-D')+fHZ^2\ldots\\ (s^2-'a^2)\frac{k}{a'}<\pi(2ks+2fHZ)\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\ldots\ldots(a).$$

Exemple. Soit $a'=b'=30{,}5$; $k=1$; $H=40$: il faut d'abord trouver la longueur s de la demi-chaînette $\alpha\mathcal{C}$.

Je cherche dans la table du n° 13 l'endroit où x et y ont entre eux le rapport 1 qui est demandé : je vois que cela aura lieu pour x entre 40,00 et 40,93, et pour y entre 40,24 et 40,62. Soit q la fraction par laquelle il faut multiplier $\Delta x=0{,}93$ et $\Delta y=0{,}38$, pour que x et y augmentés de cette fraction de différence première, deviennent égaux : on aura $x+q\Delta x=y+q\Delta y$; d'où l'on tire $q=\frac{y-x}{\Delta x-\Delta y}$. On a dans le cas présent, $q=\frac{24}{55}=0{,}44$; $q\Delta x=0{,}40$; $q\Delta y=0{,}16$: donc les nouveaux x et y intercalés dans la table, sont égaux quand ils sont chacun 40,40; mais alors s devient $s+q\Delta s$, c'est-à-dire 60,44. Il ne reste plus, pour avoir les valeurs de a', c et s, que de multiplier 40,40; 60,44 et le c de la table $=25$ par $\frac{30{,}5}{40{,}40}$ ou 0,755; ce qui donne $s=45{,}63$; $c=18{,}89$.

Mettant donc dans l'équation (21) du n° 24, 1 pour k; 30,5 pour a' et b'; 40 pour H; 45,63 pour s; et pour c, 18,89, valeur qu'on aurait aussi trouvée par l'équation $c=\frac{s^2-'a^2}{2a'}$, on trouvera $Z=5{,}19$. Nous avons vu dans l'article du berceau circulaire, que l'hypothèse de la Hire a donné $Z=6{,}56$. Le frottement a été négligé dans les deux cas.

M. Bossut a donc eu tort de dire (*Dynamique*, équilibre des voûtes,

n° 9, pag. 399) que les voûtes en chaînette ont une poussée considérable, puisqu'on vient de voir qu'elle est moindre que pour les berceaux en demi-cercle. Les constructeurs doivent, sous tous les rapports, préférer la chaînette pour les berceaux, à moins qu'ils ne doivent être chargés de poids étrangers qui détruiraient l'équilibre.

Quant au glissement, il sera aisé de vérifier qu'il n'y en aura pas.

M. Bossut est tombé dans une autre erreur : il a pris pour intrados une chaînette, et au lieu de lui mener intérieurement et extérieurement deux courbes parallèles, il n'a mené que celle qui est extérieure : j'ai fait voir qu'alors le berceau n'est plus équilibré.

Je finirai cet article par un problème qui n'a pas un rapport immédiat avec notre objet, mais qui est curieux. On demande quelle longueur il faut donner à une corde pesante qui doit être attachée à deux points fixes situés à la même hauteur, pour que la tension ou l'effort qui a lieu en ces deux points soit la plus petite possible. On sent que si la corde est très-courte, elle exercera un très-grand effort ; qu'il en sera de même si elle est longue : il existe entre ces deux extrêmes un *minimum* qu'il faut trouver.

On verra que la tension de la corde est $\frac{ks}{\sin \alpha}$, ou $\frac{ksds}{dx}$, ou (n° 13), $k(a'+c)$: ainsi la quantité qui doit être un *minimum* est $a'+c$. J'y substitue pour a' sa valeur en b' (*voyez* n° 13) ; je différentie ensuite, en faisant varier c et regardant b' comme constant : égalant la différentielle à zéro, on en tire $e^{\frac{2b'}{c}} = \frac{b'+c}{b'-c}$: on trouve que pour satisfaire à cette équation, il faut que b' valant un, c soit $\frac{1}{1,19955}$, et alors la valeur qui en résulte pour a', est 0,6751 ; c'est-à-dire que la distance du point le plus bas de la chaîne à l'horizontale passant par les deux points de suspension, doit être environ le tiers de la distance entre ces deux points. Ce résultat peut avoir des applications utiles dans la Mécanique.

Si l'un des bouts de la corde étant fixe, l'autre était roulé sur un treuil situé à même hauteur que le point fixe, la puissance appli-

quée à la manivelle du treuil serait un *minimum*, lorsque le rapport trouvé ci-dessus entre a' et b' aurait lieu. La pression qu'une voûte équilibrée, abstraction faite du frottement, exerce sur les impostes, est $\frac{s}{\sin\alpha}$: elle est dont aussi un *minimum* quand le rapport ci-dessus existe entre la base et la montée.

Au reste il ne faut pas confondre la pression avec la poussée ; celle-ci est constante et a pour expression kc ; elle est la même pour un arc quelconque de la même courbe ; elle augmente dans le rapport de c quand on passe d'un individu de la même famille à un autre. Ainsi c étant le rayon de courbure à la clef, il s'ensuit que plus la voûte est aplatie, plus la poussée est grande. C'est par la même raison que plus une corde approche de l'horizontale, plus sa poussée, c'est-à-dire l'effort qu'elle fait horizontatement pour rapprocher les deux points de suspension, est considérable.

33. *Berceau parabolique équilibré.* Dans le n° 31, le berceau parabolique n'était pas équilibré : ici l'intrados est une parabole, et l'extrados a été calculé d'après le n° 11, de manière à faire décroître l'épaisseur depuis la clef, afin d'obtenir un berceau équilibré. Ainsi les formules qui conviennent sont celles du n° 24, abstraction faite du frottement.

La voûte proposée est représentée par la figure 9. En conservant toujours les mêmes notations, on a ici le rayon de courbure à la clef, ou $r=\frac{1}{2}p=\frac{b^2}{2a}$, et de plus (*voyez* le n° 31), $D'=\frac{ak}{\sqrt{b^2+4a^2}}$; $h'=\frac{\frac{1}{2}bk}{\sqrt{b^2+4a^2}}$; $\tang\alpha=\frac{2a}{b}$. Substituant ces valeurs dans les équations (21) du n° 24, on aura celles qui conviennent au berceau proposé.

M. Bossut (*Dynamique*, n° 19, pag. 408) suppose que toutes les forces agissent sur l'intrados, ce qui revient à supposer que l'intrados est chargé de tous les poids des voussoirs, comme s'ils y étaient attachés par des fils, et que la voûte n'eût aucune épaisseur ; on voit que c'est une erreur ; il en a commis une autre en faisant, dans la figure, croître l'épaisseur depuis la clef. Au reste cet Auteur n'a jamais fait entrer le frottement dans ses calculs. J'ai donné les

moyens d'en tenir compte lorsqu'on aspire à plus d'exactitude. Je n'aurais pu entrer dans ce détail pour chaque espèce de voûte, sans passer les bornes que je me suis prescrites.

Au reste, il faut toujours se rappeler que le problème de la poussée ne comporte que des solutions approchées. Dans l'impossibilité d'avoir la vraie valeur de Z, ce qu'il y a de mieux à faire, c'est d'adopter la limite fixée par les formules que j'ai données.

34. *Voûtes en arc de cloître.* Je ferai usage dans cet article et dans le suivant, de l'hypothèse des arcs-boutans, parce que la limite qu'elle fournit procure une solution assez approchée.

Pour concevoir la voûte dont il s'agit, il faut imaginer deux demi-cylindres d'égal diamètre, se penétrant l'un l'autre, de manière que leurs axes se rencontrent perpendiculairement, leurs deux surfaces seront partagées en huit nappes, quatre égales par dessus ou en dehors, et quatre égales en dedans : les quatre premières forment une voûte d'arête; les quatre dernières, la voûte en arc de cloître. Nous allons examiner les conditions d'équilibre dans la dernière espèce.

La figure 26 représente le plan de la voûte; ABB'A' est le quarré recouvert par la voûte; AOB, BOB', B'OA', A'OA, sont les projections des quatre nappes cylindriques, qui se manifestent en forme de pyramide, à la clef dont O est la projection; la première et la troisième appartiennent au même cylindre; la seconde et la quatrième font partie de l'autre cylindre.

La figure 27 représente la section faite par un plan vertical élevé sur la ligne TT' (fig. 26) : on y voit que TP est l'épaisseur des murailles ou pieds-droits, QP l'épaisseur de la voûte; que PQ*r*R, P'Q'*r*'R', sont des portions de la voûte appartenantes aux nappes AOB, A'OB'.

Cela posé, voici comment on peut concevoir l'équilibre de la voûte : chaque nappe est composée de tranches par des plans verticaux perpendiculaires à l'axe du cylindre, et chaque voussoir d'une même tranche a deux faces dans ces plans, et deux autres dirigées à l'axe.

Imaginons quatre points symétriquement placés sur les arêtes de la voûte, et dont M, M', N', N, soient les projections; à ces quatre points aboutissent huit arcs égaux de la voûte; ces 8 arcs se contre-balancent mutuellement deux à deux : ainsi (fig. 27) les deux arcs PQrR, P'Q'r'R' se font équilibre, en s'appuyant, d'une part, contre les pieds-droits, de l'autre, en se poussant par l'intermède de la portion rectiligne de voûte Rrr'R'.

Il s'agit d'évaluer l'effet de l'arc PQrR pour faire tourner le pied-droit autour du point C, et de sommer la poussée de tous les arcs pareils pour avoir l'effet total. On suppose que la muraille qui forme le pied-droit, est liée de manière à ne former qu'un seul massif; car on sait que les poussées des différens arcs étant variables, si le pied-droit n'était pas d'une seule pièce, il pourrait être renversé dans la partie du milieu, sans l'être dans les angles.

Soit le rayon intérieur des cylindres $= \frac{1}{2}$ AB $=$ HP $= a$, l'épaisseur PQ de la voûte $= k$, la hauteur des pieds-droits PD $=$ H, leur largeur DC $=$ Z, GG' la verticale qui passe par le centre G de gravité de la portion de voûte PQrR, RM $= x$.

Il faudrait pour résoudre le problème rigoureusement, chercher le centre de gravité de l'espace PQrR, ce qui conduit à des résultats compliqués : nous supposerons que ce centre est le même que celui de l'arc $\alpha\beta$ dont le rayon est $a+\frac{1}{2}k$, ce qui est sensiblement vrai; nous supposerons encore, pour la facilité de l'intégration, que la portion de voûte PQrR s'appuie par le point α, au lieu de r, dans l'instant de la chute, ce qui est suffisamment exact.

En faisant, pour simplifier, $a+\frac{1}{2}k = \mathrm{H}\beta = r$, on trouve d'abord

$\mathrm{PG'} = a - \frac{r\sqrt{r^2-x^2}}{s}$ .... (en nommant $\alpha\beta = s$).

En se rappelant ce que nous avons dit n° 25, on verra que G'g représentant le poids de l'espace PQrR, la force horizontale, qui agit en P pour renverser le pied-droit, sera représentée par PG' : or on a PQrR $= ks$ et $\mathrm{G'}g = \sqrt{r^2-x^2}$; la poussée, exprimée par $\frac{ks.\mathrm{PG'}}{\mathrm{G'}g}$, sera donc $\frac{aks}{\sqrt{r^2-x^2}} - kr$. Cette quantité étant multipliée par Pp (fig. 26), épaisseur d'une tranche verticale de la nappe, donnera la poussée de cette tranche; et en l'intégrant, on aura la poussée de toute la nappe.

Or on a $AP = PM = a - x$, d'où $Pp = d(AP) = -dx$. L'expression de la poussée de la tranche élémentaire dont $PpmM$ est la projection, devient donc $-\frac{aksdx}{\sqrt{r^2-x^2}} + krdx$; mais on a $ds = \frac{-rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}$, ce qui change l'expression ci-dessus en celle-ci: $\frac{aksds}{r} + krdx$, dont l'intégrale est $\frac{aks^2}{2r} + krx + c$. Cette quantité doit être zéro, lorsque $s = 0$ et $x = r$, ce qui donne $c = -kr^2$: de plus, elle doit être complète pour toute la demi-nappe, quand $s =$ le quart de cercle $= \frac{3,14116 r}{2}$, et $x = 0$. Faisant ces substitutions, on a pour la poussée horizontale de la demi-nappe AOB, l'expression $\frac{1}{8}(3,1416)^2 akr - kr^2$, et pour la nappe entière, $2kr(12337a - r)$.

Pour avoir le poids de la voûte, ou la résultante de toutes les forces verticales qui pressent le pied-droit aux différens points P, et dont chacune est exprimée par ks, il faudra intégrer $-ksdx$: on a $\int -ksdx = -ksx + \int kxds = -ksx + \int \frac{-krxdx}{\sqrt{r^2-x^2}} = -ksx + kr\sqrt{r^2-x^2}$, quantité à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter, parce qu'elle devient zéro, quand $x = r$ et $s = 0$: en y faisant $x = 0$, on a pour la demi-nappe, kr^2, et pour la nappe entière, $2kr^2$. Remarquons que la somme des pressions verticales est le poids même du quart de voûte; ce poids ou ce volume étant divisé par k, doit donner la surface: cette surface est donc ici $2r^2$, c'est-à-dire le double de l'aire de sa projection AOB, résultat aussi simple que remarquable. En égalant le moment de la poussée horizontale autour du point C, à ceux du poids du quart de voûte et du pied-droit; pour plus de généralité, j'appelle f la densité comparée à celle 1 de la voûte; on a l'équation d'équilibre,

$$2krH(1,2337a - r) = 2r^2kZ + \frac{fHZ^2}{2}(2a + Z).$$

En appelant toujours π la fraction qui exprime le rapport du frottement à la pression, la condition qu'il n'y ait pas de glissement dans les pieds-droits, sera exprimée par l'inégalité suivante:

$$2kr(1,2337a - r) < \pi[2r^2k + fHZ(2a + Z)].$$

Il est utile encore de connaître le volume renfermé sous la voûte, ou compris entre elle et le quarré de la base. En appelant s' l'arc PR (fig. 27), on voit qu'il faudra ajouter toutes les tranches élémentaires qui ont PpmM pour projection horizontale, et le demi-segment PRM pour projection verticale : or on a $\text{PRM} = \frac{1}{2} as' - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$; l'épaisseur de la tranche verticale ci-dessus est dx : on a donc, pour le volume d'une portion de l'espace couvert par la nappe $\int -\frac{1}{2} as'dx + \frac{1}{2} \int xdx \sqrt{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} as'x + \frac{1}{2} \int axds' - \frac{1}{6}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} as'x + \frac{1}{2} \int \frac{-a^2 xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{1}{6}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} as'x + \frac{1}{2} a^2 \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{6}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, quantité à laquelle il ne faut point ajouter de constante, parce quelle est nulle d'elle-même, quand $s' = 0$ et $x = a$: en y faisant $x = 0$, on a $\frac{1}{3} a^3$ pour le volume recouvert par la demi-nappe, et par conséquent $\frac{8}{3} a^3$ pour celui recouvert par la voûte entière.

Nous avons vu que la surface de la voûte est double de celle de sa base : nous venons de trouver que le volume qu'elle embrasse est $\frac{8}{3} a^3$, c'est-à-dire les $\frac{2}{3}$ du parallélipipède circonscrit : ces propriétés sont les mêmes que pour une voûte hémisphérique, propriété simple et curieuse.

35. *Voûte d'arête*. Nous avons expliqué dans le problème précédent, la génération de la voûte d'arête en même temps que celle de la voûte en arc de cloître : la figure 28 est le plan de la voûte d'arète ; $ad b' b$ est le quarré qui lui sert de base, ou qui est recouvert ; AELF est un des quatre piliers égaux qui supportent les quatre angles de la voûte ; la figure 29 est la section faite par un plan vertical élevé suivant QQ' (fig. 28) ; la figure 30 est la section faite par un plan vertical passant par la diagonale EE' de la fig. 28 : dans ces figures on a ponctué les lignes qui n'ont pas de réalité, et qui ne servent qu'aux démonstrations.

Voici comment il faut concevoir l'équilibre dans cette voûte. Soient M, M', N', N, les projections horizontales (fig. 28) de quatre points symétriquement placés sur les arêtes de la voûte ; imaginons qu'on ait conduit par ces points, pris deux à deux, quatre plans verticaux et infiniment près de ceux-ci, quatre autres plans pa-

rallèles; ces quatre plans fourniront quatre sections égales à celles de la figure 29.

Cela posé, voici ce qui arrive au moment où les pieds-droits sont près à être renversés. Chacun des quatre arcs dont MM′, M′N′, M′N, NM sont les projections, et dont (fig. 29) Rrr′R′ est le profil, s'ouvre dans son milieu Z à l'intrados; les deux moitiés se contre-balancent en se buttant à l'extrados en Z; les extrémités inférieures de ces demi-arcs pèsent de tout leur poids en R (fig. 30), sur l'arête elliptique qu'on peut se représenter comme étant une courbe solide; cette ellipse se trouve ainsi chargée des poids variables des arcs ZR, qui croissent depuis S jusqu'à l'extrémité *a* du grand axe; la résultante de tous ces poids, pour le quart de voûte *a*VOV′, sera égale au poids de ce quart de voûte, et passera par un point X′ de la diagonale AO. Alors on pourra concevoir (fig. 30) quatre forces AY, XX′, AX′, XY, dont la première et la troisième ont une résultante égale et directement opposée à celle de la seconde et de la quatrième (*voy.* le n° 23); AX′ représentera la force qui tend à renverser le pilier suivant sa diagonale, si XX′ représente le poids du quart de voûte: il faut donc chercher l'expression de AX′.

Soit (fig. 29) a le rayon du cylindre de l'intrados $=$ HZ; soit $Zz = k$ l'épaisseur de la voûte, $M\alpha = x$, $\alpha\gamma = s$, $H\gamma = a + \frac{1}{2}k = r$.

On a $RrzZ = ks$: le poids de l'arc qui presse en M (fig. 28) ou en R (fig. 29 et 30), sera $ks.Hh$. Mais on a $HM = \sqrt{r^2 - x^2}$ (fig. 29), et (fig. 28) $HO = HM$, à cause du triangle MOH isoscèle: donc $Hh = d(OH) = \frac{-xdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$; donc le poids des deux arcs élémentaires ou tranches ayant pour projection MH*hm* et MH′*h′m*, qui agissent dans la verticale passant par M, sera $\frac{-2ksdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Pour avoir la distance AX′ du centre de gravité cherché, il faut multiplier la somme de tous les poids ci-dessus par leur distance AM, et diviser le produit par la somme des poids, c'est-à-dire par le quart de la voûte. Or on a $AM = \sqrt{2}\,(a - \sqrt{r^2 - x^2})$; la quantité à intégrer est donc $\frac{-8^{\frac{1}{2}} aksxdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + 8^{\frac{1}{2}} ksxdx$. Si l'on fait attention que $ds = -\frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$;

et

et qu'on intègre par parties, on trouvera pour l'intégrale,

$$2^{\frac{1}{2}}ksx^2+8^{\frac{1}{2}}aks\sqrt{r^2-x^2}+8^{\frac{1}{2}}akrx-\tfrac{1}{2}2^{\frac{1}{2}}krx\sqrt{r^2-x^2}-\tfrac{1}{2}2^{\frac{1}{2}}kr^2s+c.$$

On détermine la constante c, en observant qu'à la clef l'intégrale doit être nulle, et qu'alors on a $s=0$, $x=r$; on la complète en faisant ensuite $x=0$, $s=1{,}5708r$, pour qu'elle embrasse toute la ligne OA. Par là, elle devient

$$8^{\frac{1}{2}}kr^2(0{,}5708.a-0{,}3927.r).$$

Divisant cette quantité par le volume du quart de voûte (qui s'obtient en retranchant le quart de la voûte en arc de cloître, de la portion correspondante du berceau cylindrique), lequel est $1{,}1416kr^2$, on a, pour la distance cherchée,

$$AX'=\frac{8^{\frac{1}{2}}}{1{,}1416}(0{,}5708a-0{,}3927.r),$$

ou $AX'=1{,}4141a-0{,}9729r$; Quant à la force effective, qui pousse horizontalement le pilier suivant X'A (fig. 30), elle est égale au poids du quart de voûte, multiplié par $\frac{AX'}{XX'}$, c'est-à-dire, à

$$\frac{1{,}1416kr^2(1{,}4141a-0{,}9729r)}{a+k},\ \text{ou}\ \frac{kr^2}{a+k}(1{,}6143a-1{,}1107r).$$

Multipliant cette force par la hauteur $AD=H$ du pilier, on aura son moment autour du point C. Multipliant le quart de la voûte par $\sqrt{2}Z$ [en appelant Z le côté AL du pilier (fig. 28)], on aura le moment de la pression de la voûte sur le pilier. Enfin, multipliant le poids fHZ^2 du pilier dont la densité est f, par $\frac{1}{2}\sqrt{2}Z$, on aura le moment de ce pilier. Égalant le premier moment à la somme des deux autres, on aura, réduction faite, l'équation d'équilibre

$$\frac{kr^2H}{a+k}(2{,}2832a-1{,}5708r)=2{,}2832kr^2Z+fHZ^3.$$

La condition qu'il n'y ait pas de glissement dans le pied-droit,

10

sera exprimée par l'inégalité suivante (π étant le rapport du frottement à la pression) :

$$\frac{kr^2}{a+k}(1{,}6143\,a - 1{,}1107\,.r) < \pi(1{,}1416\,kr^2 + f\mathrm{HZ}^2).$$

On trouve le volume de l'espace recouvert par la voûte d'arête, en retranchant le volume de la voûte en arc de cloître, de deux fois le volume du berceau cylindrique, et l'on a $3{,}6165\,a^3$, en appelant a le rayon de l'intrados ou du vide du berceau.

Observation. Je place ici, pour la commodité de ceux à qui l'analyse n'est pas familière, quelques formules moins exactes, mais plus simples.

Soit $r =$ rayon moyen du cylindre générateur, $\mathrm{M} =$ poids d'une nappe ou quart de voûte, $\mathrm{P} =$ poids du quart de tout le massif des pieds-droits ou murs du pourtour, $a =$ rayon de l'intrados, H leur hauteur, et Z leur épaisseur.

Il n'y aura pas de renversement dans la voûte en arc de cloître, si l'on a $0{,}23\,\mathrm{MH} < \mathrm{MZ} + \frac{1}{2}\mathrm{PZ}$.

Il n'y aura pas glissement des pieds-droits, si l'on a

$$0{,}223\,\mathrm{M} < \pi(\mathrm{M} + \mathrm{P}).$$

On a aire de la voûte entière $= 8r^2$.

Capacité qu'elle recouvre $= \frac{8}{3}a^3$.

Voûte d'arête. $\mathrm{M} =$ poids du quart de la voûte, $\mathrm{P} =$ poids de l'un des piliers, H sa hauteur, Z le côté de sa base, A le rayon du cylindre d'extrados, a celui d'intrados.

Il n'y aura pas de renversement, si l'on a $0{,}31\,\mathrm{MH} < \mathrm{MZ} + \frac{1}{2}\mathrm{PZ}$.

Il n'y aura pas glissement, si l'on a $0{,}31\,\mathrm{M} < \pi(\mathrm{M} + \mathrm{P})$.

Aire de la voûte entière $= 4{,}5664\,\mathrm{A}^2$.

Volume qu'elle recouvre $= 3{,}6165\,a^3$.

56. *Des Ponts.* Les ponts n'étant que des berceaux, tout ce que nous avons dit jusqu'à présent des seconds, s'applique aux premiers.

Cependant, comme les ponts sont ordinairement terminés par un extrados ou pavé sensiblement rectiligne et horizontal, nous examinerons ce cas, en supposant l'intrados circulaire.

Soit donc (fig. 12) un pont dont l'intrados SM' est un arc de

cercle, et l'extrados S'N' une ligne droite horizontale. En conservant toujours la notation convenue, on a ici

$$S = \tfrac{1}{2}(b+k)^2 \,\text{tang}\,\alpha - \tfrac{1}{2} b^2 \alpha.$$

On déduit aisément de la valeur de $S \cot \alpha$, que la voûte est de la seconde espèce : on le conclurait encore, en observant que l'extrados embrasse celui qui rendrait la voûte équilibrée.

La principale chose à faire, c'est de trouver la valeur de D, c'est-à-dire la distance de la montée au centre d'inertie de la demi-voûte. Pour cela, il faut prendre la différence entre le moment du triangle OS'N' et celui du secteur OSM', puis diviser cette différence par l'aire S.

Soit $M'D = H$, $M'H = 2h'$, $N'H = 2D'$, $OS = b$, $SS' = k$, $DC = Z$, $b + k = B$, $S'H = p = b \sin \alpha$; on a aire du triangle $OS'N' = \tfrac{1}{2} B^2 \,\text{tang}\,\alpha$, distance de la montée au centre de gravité de ce triangle $= \tfrac{1}{3} B \,\text{tang}\,\alpha$, moment de ce triangle par rapport à la montée $= \tfrac{1}{6} B^3 \,\text{tang}^2 \alpha$; aire du secteur $OSM' = \tfrac{1}{2} b^2 \alpha$, distance de son centre d'inertie à la montée $= \frac{2b}{3\alpha}(1 - \cos\alpha)$, moment de ce secteur par rapport à la montée $= \tfrac{1}{3} b^3 (1 - \cos\alpha)$; ce qui donne $D = \frac{B^3 \,\text{tang}^2 \alpha - 2b^3(1-\cos\alpha)}{6S}$.

Il y a une attention à faire, à cause de la figure du pied-droit ; c'est qu'il faut retrancher le moment du petit triangle M'N'H, de celui du rectangle CDHB, pour avoir le moment du pied-droit à l'égard du point C. Cela posé, il ne reste plus qu'à substituer les valeurs de S et de D dans les formules suivantes, déduites des équations (29),

$$S(H+h')\frac{p-D+D'}{-\tfrac{1}{2}k+h'} = S(Z-D') + \tfrac{1}{2} f Z^2 (H+2h') - 2fD'h'(Z - \tfrac{1}{3}D'),$$

$$S\frac{B}{p+2D'}(H+h') = S(Z-D') + \tfrac{1}{2} f Z^2 (H+2h') - 2fD'h'(Z - \tfrac{1}{3}D'),$$

$$S\frac{p-D+D'}{-\tfrac{1}{2}k+h'}, \text{ ou } S\frac{B}{p+2D'} < \pi(S + fZ(H+2h') - 2fhD').$$

Il faut observer qu'on a $p + 2D' = B \,\text{tang}\,\alpha$, $2h' = B - b\cos\alpha$.

De plus, l'angle SOM' $= \alpha$ est un arc pris sur le cercle dont le rayon est un ; ensorte que si $\alpha = 90°$, on a $\alpha = 1,5708$.

Si le pont était très-aplati, la première des équations ci-dessus exigerait une modification : il faudrait supposer que l'arc s'appuie sur le point M' et sur le point S'; alors cette équation deviendrait

$$\mathrm{SH}\,\frac{\mathrm{P}-\mathrm{D}}{2h'} = \mathrm{SZ} + \tfrac{1}{2}f\mathrm{Z}^2(\mathrm{H}+2h') - 2f\mathrm{D}'h'(\mathrm{Z} - \tfrac{2}{3}\mathrm{D}').$$

On voit que le premier membre de l'équation relative au glissement deviendrait $\mathrm{S}\,\frac{p-\mathrm{D}}{2h'}$.

Si l'on voulait employer l'hypothèse du coin avec frottement, il faudrait faire usage des équations (23), (24), (22), comme on le verra dans l'article suivant, où les calculs sont plus simples : observons cependant qu'on peut toujours, dans chaque cas particulier, trouver le *maximum* de F et de Z, en cherchant par le tâtonnement les valeurs de α, qui rendent des *maximas*, les quantités dont les équations (23 et 24) indiquent les différentielles. Quand les expressions analytiques de ces équations sont compliquées, on peut encore, par quelques substitutions successives, approcher assez près du *maximum* cherché.

37. *Berceau plat.* On appelle berceau plat celui représenté par la figure 31, dont l'extrados et l'intrados sont deux lignes horizontales, et dont les joints concourent en un point commun O : cette voûte diffère de toutes les précédentes, en ce que les joints ne sont point perpendiculaires à l'intrados.

Soit $\mathrm{OS} = a$, $\mathrm{SS}' = k$, $\mathrm{SA} = b$, $\mathrm{A}a = \mathrm{K}$, $\mathrm{\mathcal{C}R}' = h'$, $\mathrm{AR}' = \mathrm{D}$, $h' = \frac{1}{2}k$, l'angle d'un joint quelconque avec la verticale $= \alpha$, $\mathrm{A\mathcal{C}R}' = \alpha'$.

On verra aisément qu'on a $\mathrm{S} = k(a + \frac{1}{2}k)\tang\alpha' = k(b + \frac{1}{2}k)$, $\mathrm{M} = k(a + \frac{1}{2}k)\tang\alpha$. Donc, sans le frottement, la poussée $\mathrm{M}\cot\alpha$ serait $k(a + \frac{1}{2}k)$, et par conséquent constante : la voûte est donc équilibrée.

En observant que dans l'hypothèse des arcs-boutans, il faut prendre A et S' pour centres des mouvemens ou points d'appui de la demi-voûte, au moment de la rupture, on verra que les équations (29)

deviennent

$$\tfrac{1}{2}b(b+\tfrac{1}{2}k)\,\mathrm{H}=k(b+\tfrac{1}{2}k)\,\mathrm{Z}+\tfrac{1}{2}f\mathrm{HZ}^2,$$
$$k(2a+k)(\mathrm{H}+\tfrac{1}{2}k)=k(2b+k)(\mathrm{Z}-\mathrm{D}')+f\mathrm{HZ}^2.$$
$$\tfrac{1}{2}b(b+\tfrac{1}{2}),\ \text{ou}\ \ k(a+\tfrac{1}{2}k)<\pi\,[k(b+\tfrac{1}{2}k)+f\mathrm{HZ}^2].$$

Comme les calculs relatifs à cette voûte sont faciles, je vais chercher l'équation d'équilibre dans l'hypothèse du coin avec frottement. La première chose à faire est de chercher le *maximum* de F : on a $\mathrm{F}=\mathrm{M}\cot(\theta+\alpha)=k(a+\frac{1}{2}k)\times\tang\alpha.\cot(\theta-\alpha)$. Différentiant et faisant $d\mathrm{F}=0$, on trouve $\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha$; équation qui, étant résolue, donne $\tang\alpha=\text{séc}\,\theta-\tang\theta=0{,}7208$; d'où $\alpha=35^\circ\,47'$, c'est-à-dire que α est le complément de $\theta+\alpha$, ou la moitié du complément de θ (en se rappelant que $\theta=18^\circ\,26'$). On aurait tiré cette même conséquence de l'équation ci-dessus, sans prendre la peine de la résoudre. Ayant trouvé que le coin de plus grande poussée est de $35^\circ\,47'$, on en tire $\mathrm{F}=0{,}5195\,k(a+\frac{1}{2}k)$.

Ayant trouvé F, il faudrait trouver son point d'application le plus favorable, par le moyen de l'équation (24); mais l'équation (*a*) du n° 28, fait voir tout de suite que le point cherché est aux naissances, puisqu'en ce point, *h* étant égal à zéro, la somme des trois momens est zéro, et que partout ailleurs elle est négative; d'où il suit que c'est le joint des naissances qui procure le *maximum* de Z. Cela posé, on trouve aisément les équations suivantes :

$$0{,}5195k\,(a+\tfrac{1}{2}k)(\mathrm{H}+\tfrac{1}{2}k)=k\,(b+\tfrac{1}{2}k)\left(\mathrm{Z}-\frac{bk}{2a}\right)+\tfrac{1}{2}f\mathrm{HZ}^2;$$
$$0{,}5195k\,(a+\tfrac{1}{2}k)<\pi\,(kb+\tfrac{1}{2}k^2+f\mathrm{HZ}).$$

Si $\frac{b}{a}$ était plus petit que 0,7208, la valeur de F changerait un peu, puisqu'alors le coin de plus grande poussée ne saurait être plus grand que celui formé par la voûte entière : il serait aisé de faire le changement convenable à la formule ci-dessus.

On voit qu'en ayant égard au frottement, la valeur de Z est bien plus petite qu'en le négligeant. On peut regarder la dernière formule comme approchant beaucoup plus près de la vérité que toutes les autres.

Cette voûte est très-propre à faire voir dans quel cas chacune des deux hypothèses est préférable. En effet si k est grand ainsi que a par rapport à b, il est évident qu'on ne peut employer que l'hypothèse du coin; c'est l'inverse dans le cas contraire.

SECTION V.

Du pied-droit d'égale résistance et du minimum *des matériaux.*

38. *Pied-droit d'égale résistance.* Jusqu'ici j'ai considéré les pieds-droits comme des massifs composés de molécules fortement adhérentes, et j'ai supposé que ces massifs ne pouvaient que se renverser ou glisser sur leurs bases, sans pouvoir se rompre; mais il peut arriver qu'un-pied-droit tende à se briser suivant une section horizontale ou par assises, comme il arriverait à une pièce de bois implantée verticalement, et qui serait tirée horizontalement par une puissance, avec cette différence qu'une colonne de pierre se rompt sans ployer. On peut se proposer de donner à la face extérieure du pied-droit, une figure telle, que la voûte et le pied-droit soient en équilibre, quelle que soit la hauteur du pied-droit, et qu'en même temps il résiste à la rupture avec une force égale dans toutes les sections horizontales : on peut appeler ce problème du nom de *pied-droit d'égale résistance.* M. Epinus s'est occupé de cette question dans les *Mémoires de Berlin*, année 1855 ; mais sa solution est fausse, parce qu'il n'a pas eu égard à la pression verticale de la voûte sur le pied-droit. Celle de M. Bossut, dans son ouvrage cité, est aussi imparfaite, comme je le ferai voir plus bas.

Soit (fig. 32) $Aaa'A'$ la section de la voûte en berceau qui repose sur les plans inclinés Aa, $A'a'$ des coussinets AaI, $A'a'I'$, et qui fait effort pour les écarter : le poids de la voûte produit deux forces en E; l'une horizontale ou la poussée F qui tend à renverser le pied-droit en le faisant tourner autour du point N d'une section quelconque NQ, l'autre verticale S qui s'ajoute au poids du pied-droit. De plus, les molécules de chaque section horizontale NA du pied-droit, tiennent entre elles par une force d'adhérence dont l'expérience seule peut faire connaître l'intensité qui est cons-

tante, et qu'on peut se représenter comme de petits poids égaux, distribués uniformément sur la ligne NQ. Il faut pour l'équilibre, que le moment de la poussée soit pour chaque section, égal à la somme des momens des trois dernières forces verticales autour du point de rupture N.

Soit le poids de la demi-voûte SSTA $=$ S, $AQ = u$, $QN = z$, $AE = D'$. (Si la densité de la voûte et des pieds-droits n'est pas la même, la lettre S sera le produit de l'aire par la densité relative de la voûte.)

Soit g la force ou le poids qu'il faudrait employer pour vaincre l'adhérence des molécules du pied-droit, distribuées sur une ligne $= 1$.

Le moment de la poussée F pour faire tourner l'aire AENQ autour du point N sera uF.

Le moment du poids de la voûte sera, dans le sens vertical, $S(z - D')$.

L'aire AENQ $= \int z du$. La somme des momens des élémens de cet espace à l'égard de l'axe AD, sera $= \frac{1}{2} \int z^2 du$. La distance NG' du centre G d'inertie de cet espace sera $z - \frac{\int z^2 du}{2\int z du}$. Le moment de cet espace à l'égard du point N sera $\int z du \left(z - \frac{\int z^2 du}{2\int z du}\right)$, ou $z\int z du - \frac{1}{2}\int z^2 du$.

La somme des forces d'adhérence distribuées sur QN, sera gz. Le moment de la résultante de ces forces d'adhérence sera $\frac{1}{2} g z^2$.

Egalant le moment de la poussée à la somme des momens des trois forces verticales, on aura l'équation d'équilibre suivante

$$uF = S(z - D') + \frac{1}{2} g z^2 + z\int z du - \frac{1}{2}\int z^2 du \ldots\ldots (a).$$

Différentiant deux fois de suite cette équation, pour la débarrasser du signe $\int$, en observant de faire dz constant, on a

$$(2F - z^2)\, d^2u - 4z dz du = 2g dz^2.$$

Faisant $du = p dz$, on a

$$d^2u = dp dz.$$

Substituant, on a la transformée

$$(2F - z^2)\,dp - 4pzdz = 2gdz;$$

qui étant multipliée par le facteur $(2F - z^2)$ devient intégrable et donne

$$(2F - z^2)^2 p = 4gFz - \tfrac{2}{3}gz^3 + c;$$

d'où l'on tire, en mettant $\frac{du}{dz}$ pour p,

$$du = \frac{c + 4gFz - \frac{2}{3}gz^3}{(2F - z^2)^2}\,dz \ldots\ldots\ldots (b),$$

équation qui s'intègre en partie algébriquement, en partie par logarithmes.

Pour déterminer la constante c, il faut remonter à l'équation (a), qui doit se vérifier pour le point E où le poids du pied-droit et la force d'adhérence sont nuls; ce qui réduit cette équation à $uF = S(z - D')$, qui donne $\frac{du}{dz} = \frac{S}{F}$. Substituant cette valeur de $\frac{du}{dz}$, ainsi que D', pour z dans l'équation (b), on en tire aisément la valeur de c.

Quant à la constante c' que la seconde intégration de l'équation (b) introduira, on la déterminera par la condition qu'au point E on doit avoir à la fois $u = 0$ et $z = D'$. On aura ainsi tout ce qu'il faut pour construire la courbe EC. Enfin, prenant AD de la grandeur qu'on veut donner à la hauteur du pied-droit, on aura DC = Z.

Si on néglige le frottement dans l'hypothèse du coin, on a $F = S \cot \alpha$, et la valeur ci-dessus de $\frac{du}{dz}$ devient $\frac{du}{dz} = \text{tang}\,\alpha$; d'où l'on conclut aisément que la tangente de la courbe EC doit, au point E, être perpendiculaire sur le joint des naissances. Cela est aisé à comprendre. En effet, le poids du massif est alors nul; la courbe EC n'est plus qu'un petit élément rectiligne qui, pour soutenir la voûte formant coin, doit nécessairement être perpendiculaire aux faces de ce coin. C'est aussi ce que fait voir l'équation $uF = S(z - D')$, qui au point E devient $\frac{0}{0} = \frac{du}{dz} = \frac{S}{F}$.

M. Bossut (nº 21, pag. 413) s'est trompé en supposant tacitement qu'on

qu'on pouvait obliger la courbe EC à faire un angle quelconque avec le joint Aa : cet angle n'est point arbitraire, et il ne peut être que droit : ainsi la détermination de sa constante est entièrement fausse. Observons de plus que pour simplifier la question, il a placé l'origine E de la courbe à l'intrados A, ce qui serait impraticable dans l'exécution, attendu que la voûte ne saurait reposer sur un seul point.

Si le pied-droit, au lieu d'être d'une seule pièce, comme on l'a supposé dans l'article précédent, est composé de plusieurs tranches ou assises horizontales, ce qui a lieu ordinairement, il est aisé de sentir qu'alors c'est dans ces sections où l'adhésion est presque nulle, que la rupture tendra à se faire. La quantité g qui exprimait la force d'agrégation de deux molécules de pierres, sera beaucoup plus petite dans ce dernier cas où elle n'est plus que l'adhérence produite par le mortier : on pourra même la regarder comme nulle, et en faisant $g = 0$ dans les résultats de l'article précédent, on aura une solution plus conforme à ce qui a lieu dans la pratique de l'Architecture. Pour avoir plus de stabilité, il faudra augmenter un peu les valeurs de z données par le calcul.

On aura aussi un pied-droit d'égale résistance, c'est-à-dire qui dans toutes ses tranches horizontales opposera la même résistance, tant à la rupture qu'au renversement : ce pied-droit aura encore l'avantage d'être le plus petit possible en poids ou en volume.

Il est encore une dernière perfection à ajouter au pied-droit : il faut s'assurer qu'il ne glissera pas, soit sur la plate-forme, soit d'une assise à l'autre : cela se vérifie par l'inégalité suivante

$$F < \pi (S + \int z du) \ldots\ldots (c).$$

Il pourra arriver que la condition précédente se vérifie dans toute la hauteur du pied-droit, ou seulement dans une certaine étendue à partir de la base. Dans ce dernier cas, il faudra que la portion qui pourrait être désunie par le glissement, soit d'une seule pièce, ou que les assises en soient liées plus étroitement par des moyens quelconques.

39. Minimum *des matériaux*. Voici une question intéressante et qui peut trouver des applications dans l'Architecture. On veut faire

une voûte dont le rayon de la base, l'épaisseur de la voûte, la hauteur des pieds-droits et la nature tant de l'intrados que de l'extrados sont données : on demande quelles doivent être la montée et l'épaisseur des pieds-droits, pour que le volume total de la voûte et des pieds-droits soit un *minimum*, en conservant d'ailleurs l'équilibre entre la voûte et le pied-droit.

On voit que la quantité qui doit être un *minimum* est $S + HZ$. Supposons, pour faire une application, que l'intrados doive être une parabole ayant pour équation $y^2 = \frac{b^2 x}{a}$, et l'extrados une autre parabole ayant pour équation $'y^2 = \frac{(k+b)^2}{a+k}\, x'$. L'épaisseur à la clef et aux naissances sera k. On trouvera aisément

$$S = \tfrac{2}{3}(b+k)(a+k) - \tfrac{2}{3}ab = \tfrac{2}{3}k(a+b+k).$$

L'équation du *minimum* sera

$$d\left(\tfrac{2}{3}k(a+b+k) + HZ\right) = 0,$$

qui étant différentiée par rapport à Z et a, donne

$$-dZ = \frac{2k}{3H}\,da.$$

Pour simplifier les calculs, je regarderai la voûte comme un coin sans frottement et d'une seule pièce, reposant sur les impostes : alors l'équation d'équilibre de rotation sera

$$HS \cot \alpha = SZ + \tfrac{1}{2} HZ^2.$$

On a $$\cot \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}.$$

Après y avoir substitué les valeurs de $\cot \alpha$ et S, je différentie l'équation d'équilibre, en ne faisant varier que Z et a, il vient

$$2bkH.da = 4a(ak + bk + k^2)dZ + 4kZ(2a + b + k)da$$
$$+ 3HZ^2.da + 6HaZdZ.$$

Substituant dans celle-ci la valeur trouvée pour dZ, on a l'équation finie

$$2bkH = -\frac{8ak^2}{3H}(a+b+k) + 4kZ(2a+b+k) + 3HZ^2 - 4akZ,$$

laquelle étant combinée avec l'équation d'équilibre, fera connaître les inconnues Z et a.

On sent que la solution donnera des résultats un peu différens, suivant l'hypothèse qu'on adoptera pour l'équation d'équilibre.

On pourrait soupçonner que, tout restant d'ailleurs de même, il existe une montée a qui procure un *minimum* pour Z; mais cela n'est pas : plus a augmente, plus Z diminue : il suffit, pour s'en convaincre, de mettre dans l'équation d'équilibre les valeurs de S et cot α, et de tirer ensuite la valeur de Z.

Si l'on veut connaître la marche de la poussée relativement à la variation de a, et savoir s'il existe un *minimum*, il faut faire $d\,(\text{S} \cot \alpha) = 0$. Dans le même exemple, la quantité à différentier est $\frac{1}{3}\,bk + \frac{b^2k}{3a} + \frac{bk^2}{3a}$, quantité qui diminue à mesure que a augmente, et qui a pour limite $\frac{1}{3}\,bk$; c'est le *minimum* de la poussée qui a lieu quand la montée est infinie.

Si l'on veut savoir quand la poussée tangentielle ou la pression sur les impostes est un *minimum*, on aura $d\left(\frac{\text{S}}{\sin \alpha}\right) = 0$, ou $d\left(\text{S}\,\frac{ds}{dx}\right) = 0$, où $d\left(\frac{2}{3}\,k\,(a + b + k)\sqrt{1 + \frac{b^2}{4a^2}}\right) = 0$, on trouvera

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\,b^2\,(b + k)}.$$

CHAPITRE III.

DE L'ÉQUILIBRE ENTRE LES VOUSSOIRS DES VOÛTES EN DOME A BASE CIRCULAIRE.

SECTION PREMIÈRE.

Problème général. ÉTANT donnée la courbe génératrice de la surface de l'intrados, trouver celle d'extrados, et réciproquement : ou bien, étant donné l'intrados générateur, trouver la loi des forces, et réciproquement.

40. *Équations générales.* On sait qu'on appelle *voûte en dôme à base circulaire*, celle qui est engendrée par la révolution d'une courbe plane autour d'un axe vertical qui est la montée du dôme. La surface de révolution qui en résulte, forme la surface d'intrados; la seconde surface engendrée par une seconde courbe plane qui embrasse la première, forme la surface d'extrados. Si l'on imagine que le cercle de la base de la voûte soit divisé en parties égales (fig. 35) et que par les points de division et par l'axe on ait mené des plans verticaux, la voûte sera partagée en un certain nombre de secteurs égaux symétriquement placés et se faisant équilibre deux à deux, en se buttant l'un contre l'autre par leur tranchant commun avec l'axe. Il faut de plus imaginer que les joints perpendiculaires à la courbe génératrice de l'intrados aient décrit dans le mouvement commun, des surfaces coniques : alors les surfaces d'extrados et d'intrados se trouveront partagées par des méridiens verticaux et par

des cercles parallèles horizontaux, en petits espaces trapézoïdaux : la voûte se trouvera formée de petits voussoirs ayant la forme de pyramides tronquées, et composés de six faces, savoir, deux trapèzes faisant partie des surfaces d'intrados et d'extrados, et quatre autres faces, deux planes et verticales et deux coniques, toutes quatre perpendiculaires à l'intrados.

Il est aisé de voir que les conditions d'équilibre entre les voussoirs de deux secteurs ou onglets opposés quelconques, seront les mêmes, et que la question se réduit à la recherche de cet équilibre pour avoir celui de toute la voûte.

Afin de trouver les conditions d'équilibre entre les deux secteurs infiniment petits ou voûtes élémentaires ci-dessus, imaginons une section verticale qui les partage chacun en deux parties égales : si P et Q sont les forces normales à l'intrados, et verticales qui agissent sur chaque point de la petite surface intérieure du voussoir, la résultante de ces deux espèces de forces sera nécessairement dans le plan de la section verticale ci-dessus : on sentira qu'on peut raisonner ici, comme nous l'avons fait pour les berceaux, le coin du milieu était une tranche verticale et d'une épaisseur constante, au lieu qu'ici ce coin est formé de deux onglets égaux dont l'épaisseur augmente depuis la clef : du reste, les conclusions sont absolument les mêmes.

Que la figure 4 soit donc la section verticale qui partage en deux parties égales les deux secteurs infiniment petits et opposés : P étant la force qui presse perpendiculairement chaque point de la surface de l'intrados, Pds sera celle qui presse chaque point de l'élément ds de l'intrados générateur, et $\frac{2myPds}{n}$ celle qui presse le petit trapèse de la surface d'intrados qui sert de base à un petit voussoir (en appelant m le rapport de la circonférence au diamètre, et n le nombre infiniment grand des secteurs).

On trouvera de même que Q étant la force verticale qui sollicite chaque point de la surface d'intrados, $\frac{2myQds}{n}$ est celle qui sollicite la base d'un voussoir élémentaire.

Comme il s'agit de comparer les efforts que les voussoirs d'un même onglet exercent les uns sur les autres, on peut concevoir par

la pensée, que l'onglet est réduit à la section moyenne qui passe par son milieu, ou, ce qui revient au même, que les forces qui agissent sur la base d'un voussoir, sont concentrées sur le petit arc ds, générateur de cette base. Alors le problème est de même espèce que celui que nous avons résolu pour les berceaux dans les n°s 4, 5 et 6; et sans prendre la peine de refaire les calculs, il suffit, dans les équations (9) et (11), de substituer $\frac{2myP}{n}$ pour P, et $\frac{2myQ}{n}$ pour Q, ou simplement yP pour P et yQ pour Q, parce que le coefficient constant $\frac{2m}{n}$ disparaît de lui-même. On aura ainsi les équations suivantes qui seront pour les voûtes de révolution, ce que les équations (9) et (11) sont pour les berceaux,

$$d\left(\frac{PRydy}{ds}\right)+d\left(\frac{QRydy^2}{ds^2}\right)+Pydx=0\ldots\ldots.(30).$$

$$d\,(PRy)+d\left(\frac{QRydy}{ds}\right)-Qydx=0\ldots\ldots.(31).$$

On choisit dans les applications celle des deux équations qui se prête le mieux à l'intégration. Par leur moyen on peut, comme nous l'avons fait pour les berceaux, résoudre ce double problème : étant donnée la loi des forces ou la courbe génératrice de l'extrados, trouver celle de l'intrados : étant donnée la courbe génératrice d'intrados, trouver la loi des forces ou construire la courbe d'extrados. Ce second problème est toujours possible, mais le premier exige trois intégrations.

41. *Équation de la loi des forces ou des poids des voussoirs.* Je me bornerai au cas où les voussoirs ont une densité constante et ne sont soumis qu'à l'action de la pesanteur.

On a ici P $=$ o, et l'équation (30) que je choisis parce qu'elle ne renferme Q que dans un seul terme, donne, étant intégrée,

$$Q=\frac{cds^2}{yRdy^2}=\frac{cd\left(\frac{dx}{dy}\right)}{yds}\ldots\ldots\ldots(32)$$

$\left(\text{en mettant pour R sa valeur } \frac{ds^3}{dy^2d\left(\frac{dx}{dy}\right)}\right)$. C'est par cette équation

qu'on connaîtra le poids relatif Q qui sollicite chaque point de la surface courbe d'intrados, en y mettant pour $\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{yds}$ sa valeur donnée par la courbe de l'intrados : ainsi, par exemple, si l'intrados est une demi-ellipse dont a soit la montée et b la demi-base, on trouvera $Q=\frac{cab^4}{y(b^2-y^2)\sqrt{b^4-b^2y^2+a^2y^2}}$, équation qui fera connaître la force Q qui sollicite chaque point du cercle ou parallèle horizontal dont le rayon est y lorsqu'on aura déterminé c, ce qui mérite quelques observations.

M. Bossut (n° 34, pag. 426) dit que c doit être déterminé, par la condition qu'à la clef, la valeur de Q soit donnée : on ne saurait procéder ainsi; car à la clef on a $y=0$, d'où $Q=\frac{cab^4}{0}=\infty$, et par conséquent $c=0$.

Il suit de là que le pôle ou sommet de la voûte ne peut servir à déterminer c. On trouverait de même que le point des naissances ne peut pas servir non plus, du moins quand la tangente à la courbe dans ce point est verticale : mais si l'on veut que la force Q soit q, quand $y=\mathfrak{C}$, on voit que c aura une valeur finie, et qu'on pourra trouver les valeurs relatives de Q pour tous les autres points de l'intrados générateur.

Il est cependant des cas où le pôle peut servir à déterminer c, c'est lorsque le rayon de courbure est infini dans ce point. Ainsi, lorsque la courbe d'intrados donne $R=\frac{1}{0}$ à la clef, l'équation (32) donne $c=\frac{0}{0}Q$, expression indéterminée qui pourra donner pour c une valeur finie, et par conséquent faire connaître les valeurs de Q pour chaque point.

42. *Poids du dôme qui est cubable. Rapport des poids des assises.* Il résulte du numéro précédent, que $2mQy$ ou $\frac{2mc}{ds}\,d\left(\frac{dx}{dy}\right)$ est le poids qui sollicite le cercle parallèle horizontal dont y est le rayon : cette quantité est donc toujours donnée par l'équation de l'intrados générateur ; elle est pour l'intrados elliptique $\frac{2mcab^4}{(b^2-y^2)\sqrt{b^4-b^2y^2+a^2y^2}}$, quantité qui demeure finie à la clef où $y=0$.

L'expression de tout le poids du dôme est $2m\int Qyds$ ou $2mc\int d\left(\frac{dx}{dy}\right)$; c'est-à-dire $\frac{2mcdx}{dy}$, intégrale qui n'exige pas de nouvelle constante, puisqu'elle s'évanouit d'elle-même à la clef où $\frac{dx}{dy}=0$. Ainsi le poids du dôme est toujours assignable : son volume est donc aussi cubable, propriété analogue à celle des berceaux équilibrés que nous avons vu être quarrables. En appelant S′ le volume renfermé entre les surfaces d'intrados et d'extrados, on aura

$$S'=\frac{2mcdx}{dy}\ldots\ldots\ldots(33).$$

Quant à la capacité renfermée sous la surface d'intrados, son expression est comme pour tous les solides de révolution $m\int y^2dx$.

On sait de même que l'expression de l'aire de la surface d'intrados est $2m\int yds$.

43. *Grandeur des joints, leur rapport aux forces. Dômes terminés en flèche infinie.* Soit (fig. 34) $SP=x$, $PM=y$, $SM=s$, $MN=K$, $MI=R$; G le centre de gravité du voussoir infiniment petit MNnm ; GG′ sa distance à l'axe, on aura

$$\text{aire } MNnm=\frac{Kds}{2R}(2R+K),\ Gg=\frac{1}{3}K\frac{3R+2K}{2R+K},$$

et l'on trouvera

$$GG'=y+\frac{1}{3}K\frac{3R+2K}{2R+K}\cdot\frac{dx}{ds}.$$

Si d'après le principe de la méthode centrobarique, on multiplie l'aire MNnm par la distance GG′ de son centre de gravité à l'axe de rotation, et le produit par $2m$, on aura le volume ou poids d'une assise entière de voussoir. Mais, d'après l'équation (32) et suivantes, ce poids est aussi exprimé par $2mQyds$ ou par $\frac{2mcds^3}{Rdy^2}$. Egalant successivement chacune des deux dernières expressions de ce poids avec la première, on aura, après avoir supprimé les facteurs communs, les deux équations suivantes :

$$\frac{cds^2}{dy^2}=\frac{1}{2}Ky(2R+K)+\frac{1}{6}K^2(3R+2K)\frac{dx}{ds}\ldots(34);$$

$$RQy=\frac{1}{2}Ky(2R+K)+\frac{1}{6}K^2(3R+2K)\frac{dx}{ds}\ldots(35).$$

La

La première de ces deux équations sert à trouver la grandeur K du joint de lit quelconque correspondant à y, en résolvant une équation du troisième degré, après y avoir mis pour ds, dx, dy et R, leurs valeurs données par l'équation d'intrados : elle fournit donc le moyen de construire par points l'extrados générateur.

La seconde donne la relation entre K et Q; mais auparavant il faut déterminer la constante c.

En raisonnant ici comme nous avons fait plus haut, on verra qu'on peut toujours déterminer c par la condition que K devienne K' quand y devient β. Mais si on veut déterminer c par la connaissance de K à la clef, il faut distinguer deux cas. 1°. Si le rayon de courbure a une grandeur finie à la clef, l'équation (34) donne $c = 0$, ce qui ne fait rien connaître. 2°. Si R est infini au pôle, on a $c = \frac{0}{0}$, quantité qui peut être finie.

Supposons qu'on ait déterminé c pour le point où $y = \beta$, ce qui est toujours possible, l'équation (34) donnera pour K une grandeur infinie à la clef dans le premier cas, et dans le second, une grandeur qui pourra être finie ; c'est-à-dire que si le rayon de courbure de l'intrados a une grandeur finie à la clef, l'extrados s'étendra à l'infini au-dessus du pôle, en se rapprochant de l'axe comme d'une asymptote : alors le dôme sera surmonté et terminé par une espèce de flèche ou de pyramide s'étendant à l'infini, comme on le voit (fig. 35), dans laquelle l'intrados est une parabole.

Au reste, quoique la flèche s'étende à l'infini, son poids est néanmoins d'une grandeur finie : c'est ce que fait voir l'équation (33). Il arrive ici, comme pour certaines suites, que la somme d'un nombre infini de termes décroissans, a néanmoins une grandeur finie : cette remarque permet de remplacer une portion de la flèche infinie par une sphère d'un poids équivalent : ce moyen est à la fois simple et conforme au goût de l'Architecture.

Cette particularité des flèches qui aura lieu le plus souvent, puisqu'il est rare que l'intrados ait le rayon de courbure infini à la clef, est une singularité très-remarquable. J'ignore si elle a été connue de Mascheroni dont je n'ai pu encore me procurer l'ouvrage devenu très-rare. M. Bossut qui a écrit le dernier sur cette matière, n'en a point parlé, et cependant la chose méritait assez d'être remarquée.

J'ajouterai encore que l'extrados générateur peut aussi, comme dans les berceaux, avoir pour asymptote la ligne des naissances (*voyez* fig. 36).

L'intrados est un demi-cercle, et par conséquent la surface d'intrados une demi-sphère : on voit que l'extrados a deux asymptotes, la montée et la ligne des naissances : il a deux points d'inflexion de chaque côté de la montée. On sent que les voussoirs des naissances ne pouvant avoir une grandeur infinie comme l'exigerait la théorie, doivent être retenus sur les impostes, soit par le frottement, soit par tout autre moyen (*voyez* pour l'équation de l'extrados, le n° 58).

44. *Du joint qui est un* minimum. La figure 36 fait voir qu'il existe un joint plus court que tous les autres ; c'est le point où l'épaisseur de la voûte est un *minimum*. Il peut être utile de connaître sa position : pour cela il suffit de différentier l'équation (34) en faisant varier y et K, et d'égaler à zéro la valeur de $\frac{dK}{dy}$. Les facteurs feront connaître les *maxima* et *minima* de K.

Si, par exemple (fig. 36), l'intrados est un demi-cercle dont le rayon est a, et l'équation $y^2 = 2ax - x^2$, l'équation (34) devient

$$\frac{a^2c}{a^2y - y^3} = \tfrac{1}{2}K(2a + K) + \frac{K^2}{6a}(3a + 2K).$$

Différentiant et égalant à zéro la valeur de $\frac{dK}{dy}$, on trouve $y = \frac{a}{\sqrt{3}}$ pour la valeur de y, correspondante au *minimum* de K. Substituant cette valeur de y dans l'équation ci-dessus, et pour K l'épaisseur qu'on se propose de donner à la voûte dans le point M de la plus petite épaisseur, l'équation fera connaître c : enfin la même équation donnera toutes les valeurs de K correspondantes à celles de y, et l'on construira la courbe d'extrados telle qu'on la voit dans la figure.

SECTION II.

Applications.

45. *Trouver la courbe de l'intrados dans le cas où la voûte doit être infiniment peu épaisse, et soumise à la seule action de la pesanteur.* Je vais chercher la courbe génératrice de l'intrados, quand la voûte ne doit être qu'une surface courbe très-mince, et que les voussoirs ne doivent être sollicités que par l'action de la pesanteur: on a alors $P=0$ et $Q=1$, parce que la pesanteur étant une force constante qui agit uniformément sur tous les points de la voûte, peut être représentée par 1 : faisant ces substitutions dans l'équation (30) du n° 40, que je préfère parce que Q n'entre que dans un de ses termes, elle devient, en intégrant, $\frac{Rydy^2}{ds^2}=c$; substituant pour R sa valeur $\frac{ds^3}{dyd^2x}$, dans laquelle dy est constant, on a

$$ydy=\frac{cd^2x}{ds}=\frac{cd^2x}{\sqrt{dx^2+dy^2}}:$$

je fais $dx=pdy$, d'où $d^2x=dpdy$, et il vient

$$ydy=\frac{cdp}{\sqrt{1+p^2}};$$

dont l'intégrale est

$$\frac{y^2}{2c}=\log(p+\sqrt{1+p^2}),$$

à laquelle il n'y a pas de constante à ajouter, parce qu'elle donne $0=0$ quand on y fait $y=0$ et $p=\frac{dx}{dy}=0$, comme cela doit être à la clef. Si on multiplie le premier membre de l'équation $\frac{y^2}{2c}$, par $\log e$ (e étant le nombre dont le logarithme est 1), on aura

$$e^{\frac{y^2}{2c}}=p+\sqrt{1+p^2}.$$

Résolvant cette équation, et faisant pour simplifier $\frac{1}{2c} = c'$, ce qui est permis, puisque c est une constante indéterminée, on aura

$$p = -\tfrac{1}{2}\, e^{-c'y^2} + \tfrac{1}{2}\, e^{c'y^2},$$

et remettant pour p sa valeur,

$$2dx = dy\,.\,e^{c'y^2} - dy\,.\,e^{-c'y^2}.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée; on ne peut l'intégrer que par série. On a d'abord

$$e^{c'y^2} = 1 + c'y^2 + \frac{c'^2y^4}{1.2} + \frac{c'^3y^6}{1.2.3} + \text{etc.}$$

pour avoir $e^{-c'y^2}$ ou $\frac{1}{e^{c'y^2}}$, je divise l'unité par la série trouvée, et j'ai

$$e^{-c'y^2} = 1 - \frac{c'y^2}{1} + \frac{c'^2y^4}{1.2} - \frac{c'^3y^6}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Faisant les substitutions et intégrant, on a

$$x = \frac{c'y^3}{3.1} + \frac{c'^3y^7}{7.1.2.3} + \frac{c'^5y^{11}}{11.1.2.3.4.5} + \frac{c'^7y^{15}}{15.1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} \ldots (a),$$

équation qui n'exige pas de nouvelle constante, parce qu'elle donne d'elle-même $x = 0$ quand $y = 0$, comme cela doit être à la clef. Il ne reste qu'à déterminer c' par la condition qu'on ait $x = a =$ montée quand $y = b =$ rayon de la base, ce qui ne peut se faire que par le tâtonnement ou par la méthode du retour des suites. L'application de cette méthode m'a donné la valeur suivante

$$c' = \frac{3a}{b^3} - \frac{27.a^3}{14b^5} + \frac{27^2.a^5}{14^2b^7} - \frac{27^3.a^7}{14^3b^9} + \text{etc.} \ldots (b).$$

Cette série n'est convergente qu'autant que a est plus petit que b: néanmoins nous verrons comment elle sert à trouver c' dans tous les cas.

46. *Discussion de la courbe. Rectification.* On trouve aisément $ds = \frac{1}{2}\, dy\, (e^{c'y^2} + e^{-c'y^2})$, quantité qui étant intégrée d'une manière

analogue à celle qui a servi à trouver x, donne

$$s = y + \frac{c'^2 y^5}{5.1.2} + \frac{c'^4 y^9}{9.1.2.3.4} + \frac{c'^6 y^{13}}{13.1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Aire de la voûte. En faisant $m = 3{,}1416$, l'expression d'une zône horizontale élémentaire de la voûte que je fais $= ds'$, est

$$ds' = 2my\,ds = my\,dy\,(e^{c'y^2} + e^{-c'y^2}) :$$

intégrant on a

$$s' = \frac{m}{2c'}\,(e^{c'y^2} - e^{-c'y^2}).$$

En appelant z, la sounormale, on a aussi

$$s' = \frac{my}{c'z}.$$

Ainsi l'aire de la voûte est quarrable, quoique la courbe génératrice ne soit pas rectifiable.

On trouve aussi que l'aire plane renfermée par cette même courbe est quarrable, et qu'elle est

$$\int y\,dx = -\frac{1}{2c'} + \frac{1}{4c'e^{c'y^2}} + \frac{e^{c'y^2}}{4c'}.$$

Capacité sous le dôme. L'expression du solide de révolution engendré par la courbe est

$$m\int y^2 dx = \tfrac{1}{2}\,m\int y^2 dy\,(e^{c'y^2} - e^{-c'y^2}),$$

dont on trouve, en procédant comme ci-dessus, que l'intégrale est

$$m\left(\frac{c'y^5}{5.1} + \frac{c'^3 y^9}{9.1.2.3} + \frac{c'^5 y^{13}}{13.1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right).$$

Rayon de courbure et développée. On trouve que l'expression du rayon de courbure est

$$R = \frac{(e^{c'y^2} + e^{-c'y^2})^2}{8c'y},$$

d'où l'on voit qu'il est infini à la clef où $y = 0$. Depuis la clef, il va en diminuant de part et d'autre jusqu'aux points M et M′ (fig. 37) où

il est le plus petit possible : depuis ces points il recommence à croître et continue jusqu'à l'infini. La developpée de la courbe est composée de deux paires de branches et a deux points de rebroussement correspondans aux points M et M'. Pour avoir la valeur de y correspondante au point M où R est un *minimum*, il faut faire $dR = 0$, et l'on trouve $e^{2c'y^2} = \frac{4c'y^2+1}{4c'y^2-1}$. Pour le cas de $c' = 0{,}0004$, on a $36{,}126 = y$.

Épaisseur du dôme. En raisonnant ici comme nous avons fait à l'occasion de la chaînette, on se convaincra que l'épaisseur k du dôme doit être partout la même. Si on voulait une autre démonstration, on n'aurait qu'à se proposer de trouver quel est l'intrados générateur pour lequel l'extrados exigé par l'équilibre, est partout parallèle. Il faudrait pour cela intégrer l'équation (34) en supposant K constant. La courbe que l'on trouverait serait la courbe intérieure de la fig. 37 menée à la distance $\frac{1}{2}$ K, parallèlement à celle que nous avons trouvée et discutée dans cet article.

Je suis entré dans quelques détails sur la courbe dont il s'agit, parce qu'elle est la plus propre à faire un dôme solide et peu pesant: l'épaisseur de la voûte, quoique considérable, doit toujours être uniforme, tandis que si l'on adopte une autre courbe pour l'intrados, l'équilibre exige que l'épaisseur soit variable. La courbe dont il s'agit est pour les dômes, ce que la chaînette est pour les berceaux; toutes deux servent à construire l'épure de la voûte, en leur menant en dedans et en dehors deux courbes parallèles qui forment l'intrados et l'extrados. On pourrait par analogie appeler chaînette croissante, la courbe relative au dôme; car on pourrait faire une chaîne dont les anneaux allassent en croissant de part et d'autre du point le plus bas, et qui étant suspendue, prendrait la courbure du dôme renversé. Je donnerai dans le chapitre suivant, la poussée de ce dôme. Remarquons que c'est une erreur dangereuse des praticiens peu instruits, d'employer pour les dômes la chaînette ordinaire qui est si différente de la chaînette croissante.

J'ai calculé une Table qu'on voit ci-après, au moyen de laquelle on peut déterminer tout ce qui est nécessaire pour l'épure du dôme : elle fait connaître SP $= x$, PM $= y$, SM $= s$, la surface courbe

du dôme $= s'$, la sounormale PR $= z = \frac{ydy}{dx} = \frac{2y}{e^{c'y^2} - e^{-c'y^2}}$. La Table est calculée pour le cas de $c' = 0,0004$: on cherchera dans la Table les valeurs de x et y qui ont le même rapport que a et b (*voyez* nos 13, 14, 32) : on multipliera tous les nombres de la Table par $\frac{b}{y}$ ou $\frac{a}{x}$, et l'on aura le c' qui convient au dôme proposé, en multipliant le c' de la Table 0,0004 par $\frac{y^2}{b^2}$ ou $\frac{x^2}{a^2}$.

Quand on aura construit la courbe, on lui mènera en dedans et en dehors deux courbes parallèles chacune à la distance $\frac{1}{2} k$: ces deux courbes formeront l'intrados et l'extrados générateurs du dôme dont l'épaisseur uniforme sera k : il est aisé de se convaincre que les voussoirs seront mutuellement en équilibre. En effet, si l'on imagine la courbe intermédiaire divisée en petits arcs égaux à ds, les voussoirs ou plutôt leur section dans le plan vertical de la courbe, seront aussi égaux : la force qui agit sur chaque point de la courbe d'intrados sera donc aussi constante, et l'on aura toujours Q constant, comme nous l'avons supposé dans la recherche de la courbe.

Table des rapports entre l'arc SM = s, l'abscisse SP = x, l'ordonnée PM = y, la sous-normale PR = z, et la surface engendrée = s' dans la chaînette croissante, dans laquelle c' = 0,0004.

s	*y*	*x*	*z*	*s'*	*s*	*y*	*x*	*z*	*s'*
1	1,00	0,00	2500,00	3,14	46	43,46	11,40	52,41	6512,9
2	2,00	0,00	1250,00	12,57	47	42,22	12,04	51,17	6787,2
3	3,00	0,00	833,33	28,27	48	44,97	12,70	49,96	7069,5
4	4,00	0,01	625,00	50,27	49	45,71	13,38	48,81	7355,2
5	5,00	0,02	500,00	78,54	50	46,43	14,07	47,71	7643,3
6	6,00	0,03	416,66	113,10	51	47,14	14,77	46,65	7936,5
7	7,00	0,05	357,12	153,94	52	47,84	15,50	45,62	8236,0
8	8,00	0,07	312,47	201,08	53	48,52	16,22	44,63	8538,4
9	9.00	0,09	277,73	254,51	54	49,19	16,96	43,67	8846,8
10	10,00	0,13	249,93	314,25	55	49,85	17,73	42,75	9158,4
11	11,00	0,17	227,18	380,28	56	50,50	18,49	41,86	9475,0
12	12,00	0,23	208,22	452,64	57	51,13	19,26	41,00	9794,7
13	12,99	0,29	192,30	530,54	58	51,74	20,03	40,17	10116
14	13,99	0,37	178,52	615,49	59	52,35	20,83	39,38	10441
15	14,99	0,45	166,56	706,83	60	52,95	21,64	38,60	10774
16	15,98	0,55	156,17	803,66	61	53,53	22,45	37,86	11105
17	16,98	0,66	146,95	907,52	62	54,10	23,27	37,14	11440
18	17,97	0,78	138,73	1017,3	63	54,66	24,10	36,45	11777
19	18,96	0,92	131,41	1133,2	64	55,21	24,93	35,76	12126
20	19,95	1,07	124,78	1255,7	65	55,75	25,78	35,09	12478
21	20,94	1,23	118,78	1384,6	66	56,27	26,63	34,44	12832
22	21,92	1,41	113,35	1518,8	67	56,79	27,48	33,82	13188
23	22,90	1,60	108,37	1659,6	68	57,29	28,34	33,22	13545
24	23,87	1,82	103,80	1806,1	69	57,79	29,20	32,64	13906
25	24,85	2,05	99,58	1960,0	70	58,27	30,07	32,07	14271
26	25,82	2,31	95,67	2119,7	71	58,76	30,95	31,52	14641
27	26,78	2,58	92,05	2285,0	72	59,23	31,84	30,99	15011
28	27,74	2,87	88,71	2456,0	73	59,69	32,73	30,47	15386
29	28,69	3,18	85,58	2533,0	74	60,14	33,63	29,97	15760
30	29,63	3,50	82,66	2815,2	75	60,58	34,53	29,48	16140
31	30,57	3,85	79,92	3004,2	76	61,01	35,43	29,00	16523
32	31,50	4,21	77,33	3199,3	77	61,44	36,33	28,54	16908
33	32,42	4,60	74,89	3400,0	78	61,86	37,24	28,09	17296
34	33,33	5,01	72,59	3606,2	79	62,27	38,15	27,66	17682
35	34,24	5,44	70,41	3819,3	80	62,67	39,06	27,23	18076
36	35,13	5,88	68,35	4036,7	81	63,05	39,97	26,82	18466
37	36,01	6,35	66,40	4259,3	82	63,44	40,89	26,41	18866
38	36,89	6,84	64,54	4489,2	83	63,83	41,82	26,02	19266
39	37,75	7,34	62,78	4722,7	84	64,20	42,75	25,64	19666
40	38,61	7,87	61,09	4963,9	85	64,57	43,68	25,26	20077
41	39,44	8,41	59,47	5208,7	86	64,93	44,62	24,90	20480
42	40,27	8,98	57,93	5459,8	87	65,29	45,56	24,55	20888
43	41,09	9,55	56,45	5717,0	88	65,64	46,50	24,21	21295
44	41,89	10,15	55,04	5977,5	89	65,98	47,44	23,87	21710
45	42,68	10,76	53,70	6242,3	90	66,32	48,38	23,54	22127

Suite

Suite de la Table.

s	y	x	z	s'	s	y	x	z	s'
91	66,65	49,32	23,21	22553	136	77,52	92,94	14,13	43088
92	66,98	50,26	22,90	22972	137	77,70	93,92	14,01	43558
93	67,30	51,21	22,59	23398	138	77,88	94,90	13,88	44069
94	67,61	52,16	22,30	23812	139	78,05	95,89	13,76	44549
95	67,92	53,11	22,01	24237	140	78,22	96,88	13,64	45040
96	68,23	54,06	21,73	24661	141	78,39	97,86	13,52	45538
97	68,53	55,01	21,45	25092	142	78,56	98,84	13,41	46011
98	68,83	55,96	21,17	25536	143	78,73	99,83	13,29	46528
99	69,12	59,92	20,91	25962	144	78,89	100,82	13,18	47010
100	69,41	57,88	20,65	26400	145	79,05	101,81	13,07	47502
101	69,69	58,84	20,40	26831	146	79,21	102,79	12,96	48002
102	69,97	59,80	20,15	27872	147	79,37	103,78	12,85	48512
103	70,24	60,76	19,91	27708	148	79,53	104,77	12,75	48990
104	70,51	61,72	19,67	28154	149	79,69	105,76	12,64	49516
105	70,78	62,69	19,44	28595	150	79,85	106,75	12,54	50010
106	71,04	63,66	19,21	29044	151	80,01	107,73	12,44	50514
107	71,30	64,62	18,99	29489	152	80,16	108,72	12,35	50978
108	71,56	65,59	18,77	29943	153	80,31	109,71	12,25	51490
109	71,81	66,56	18,56	30387	154	80,46	110,70	12,15	52010
110	72,06	67,53	18,35	30842	155	80,61	111,69	12,06	52496
111	72,31	68,50	18,15	31290	156	80,76	112,68	11,97	52991
112	72,55	69,47	17,95	31745	157	80,91	113,67	11,88	53490
113	72,79	70,44	17,75	32208	158	81,05	114,66	11,79	53993
114	73,02	71,41	17,56	32659	159	81,19	115,65	11,70	54500
115	73,25	72,39	17,37	33121	160	81,33	116,64	11,61	55019
116	73,48	73,36	17,19	33572	161	81,47	117,63	11,52	55544
117	73,70	74,33	17,01	34030	162	81,61	118,62	11,44	56027
118	73,92	75,30	16,83	34496	163	81,75	119,61	11,35	56569
119	74,14	76,28	16,65	34972	164	81,89	120,60	11,26	57119
120	74,36	77,26	16,48	35438	165	82,02	121,59	11,18	57620
121	74,57	78,23	16,32	35887	166	82,16	122,58	11,10	58134
122	74,78	79,20	16,15	36368	167	82,29	123,57	11,02	58649
123	74,99	80,18	15,99	36833	168	82,42	124,56	10,94	59170
124	75,20	81,16	15,83	37310	169	82,55	125,55	10,86	59701
125	75,41	82,14	15,68	37772	170	82,68	126,54	10,78	60239
126	75,61	83,12	15,53	38238	171	82,81	127,53	10,71	60727
127	75,81	84,10	15,38	38713	172	82,94	128,52	10,63	61280
128	76,01	85,08	15,23	39197	173	83,07	129,51	10,56	61783
129	76,21	86,06	15,08	39692	174	83,19	130,50	10,48	62344
130	76,40	87,04	14,94	40164	175	83,31	131,50	10,41	62855
131	76,59	88,02	14,80	40645	176	83,44	132,49	10,34	63379
132	76,78	89,00	14,66	41135	177	83,56	133,48	10,27	63903
133	76,97	89,98	14,53	41605	178	83,68	134,47	10,20	64433
134	77,16	90,97	14,39	42113	179	83,80	135,47	10,13	64971
135	77,34	91,96	14,26	42596	180	83,93	136,47	10,06	65526

Suite de la Table.

s	y	x	z	s′	s	y	x	z	s′
181	84,05	137,46	10,00	66013	206	86,73	162,32	8,58	79390
182	84,17	138,45	9,93	66573	207	86,83	163,31	8,53	79949
183	84,29	139,44	9,87	67073	208	86,93	164,31	8,49	80418
184	84,40	140,43	9,80	67640	209	87,03	165,31	8,44	80989
185	84,51	141,43	9,74	68146	210	87,12	166,30	8,39	81555
186	84,63	142,42	9,68	68664	211	87,22	167,29	8,34	82138
187	84,74	143,41	9,62	69182	212	87,32	168,28	8,30	82626
188	84,85	144,40	9,56	69707	213	87,41	169,27	8,25	83214
189	84,96	145,40	9,50	70240	214	87,50	170,27	8,21	83705
190	85,07	146,40	9,44	70778	215	87,59	171,27	8,16	84304
191	85,18	147,39	9,38	71323	216	87,69	172,26	8,12	84816
192	85,29	148,38	9,32	71873	217	87,78	173,25	8,08	85326
193	85,40	149,37	9,27	72355	218	87,87	174,24	8,03	85942
194	85,51	150,37	9,21	72920	219	87,96	175,24	7,99	86462
195	85,61	151,37	9,15	73483	220	88,05	176,24	7,95	86986
196	85,72	152,36	9,10	73983	221	88,14	177,23	7,91	87514
197	85,83	153,35	9,04	74570	222	88,23	178,22	7,87	88052
198	85,93	154,35	8,99	75070	223	88,32	179,22	7,82	88704
199	86,03	155,35	8,93	75664	224	88,41	180,22	7,78	89250
200	86,13	156,35	8,88	76178	225	88,49	181,22	7,74	89792
201	86,23	157,34	8,83	76699	226	88,58	182,21	7,70	90352
202	86,33	158,33	8,78	77225	227	88,67	183,20	7,65	90916
203	86,43	159,33	8,73	77757	228	88,76	184,20	7,62	91487
204	86,53	160,33	8,68	78296	229	88,84	185,20	7,58	92052
205	86,63	161,33	8,63	78840	230	88,92	186,20	7,54	92624

CHAPITRE IV.

DE L'ÉQUILIBRE ENTRE LES DÔMES A BASE CIRCULAIRE ET LES TAMBOURS QUI LES SUPPORTENT.

SECTION PREMIÈRE.

Équation d'équilibre entre le Dôme et le Tambour.

47. *Des Dômes équilibrés.* TOUT ce que nous avons dit dans le chapitre II, sur la poussée des berceaux, est applicable aux dômes; les principes sont les mêmes; il n'y a de différence que dans la figure des corps qui se font équilibre.

Dans les berceaux, si l'on imagine des plans verticaux perpendiculaires à l'axe du berceau, et parallèles entre eux, on a des tranches verticales d'épaisseur constante; c'est pourquoi l'on peut se contenter de considérer l'une quelconque de ces sections. Dans le dôme, au contraire, les plans verticaux qui passent par la montée, partagent la voûte en secteurs ou onglets, et le tambour, qui est un cylindre creux, en prismes, qui ont pour base le petit espace mixtiligne ABB'A' (fig. 33) : chacun de ces prismes supporte un secteur de dôme, et doit résister à la poussée de ce secteur. Le dôme et le tambour seront en équilibre, si un secteur quelconque et le prisme correspondant se font équilibre. On pourra même imaginer une section verticale qui passe par le milieu du secteur et du prisme, et supposer que tout leur poids est concentré dans cette section : par ce moyen, on peut calculer dans cette section les actions réciproques du secteur et du prisme, comme s'il s'agis-

sait d'un berceau, avec cette différence que dans les berceaux les tranches verticales sont proportionnelles aux aires, au lieu que dans les dômes, les poids du secteur et du prisme correspondans ne peuvent pas être représentés par l'aire de leur section verticale, mais seulement par leurs volumes respectifs.

Cela posé, on pourra, pour trouver l'équation d'équilibre de rotation, employer, comme pour les berceaux, deux hypothèses, celle du coin avec ou sans frottement, et celle des arcs-boutans. Dans la première, il faudra considérer deux portions de secteur opposées, comme formant un coin, le reste du secteur étant supposé adhérent au tambour. On cherchera quel est le coin qui donne le *maximum* de la poussée F; regardant ensuite F comme constant, il faudra trouver le *maximum* de Z, par l'équation d'équilibre. Dans la seconde hypothèse on suivra la même marche, mais le frottement n'entrera pour rien dans la recherche de la plus grande poussée.

Dans cet article je ne m'occuperai que des dômes équilibrés, parce que le calcul est plus simple et plus rigoureux: je ferai usage de l'hypothèse du coin sans frottement.

Nous avons vu dans le n° 42, équation (33), que le volume d'un secteur, n étant leur nombre, était $\frac{2mcdx}{ndy}$. Divisant cette expression par tang α, ou par $\frac{dx}{dy}$, on a, pour la poussée F d'une portion quelconque de secteur, $F = \frac{2mc}{n}$; c'est-à-dire que cette poussée est constante et la même, quelle que soit la grandeur du coin, propriété remarquable et commune aux berceaux et aux dômes.

Cherchons maintenant le volume d'un prisme qui supporte le secteur.

Soit (fig. 33) le plan de la base du tambour, $OA = b$, $AB = Z$, H = hauteur du tambour, f = sa densité, on trouvera que le poids du tambour est $fmHZ(Z + 2b)$; celui du prisme ayant pour base le petit espace ABB'A', sera $\frac{m}{n} fZH(Z + 2b)$. La distance BG du centre de gravité du petit trapèze ABB'A', est $BG = \frac{1}{3} Z \frac{3b + Z}{2b + Z}$: ainsi la figure 9 étant la section verticale du dôme et du tambour,

le moment du prisme élémentaire ci-dessus autour du point c de rotation, sera $\frac{mfHZ^2}{3n}(3b+Z)$.

D'après cela, et conservant toujours la notation convenue, on verra facilement que les équations d'équilibre de rotation et du non-glissement du tambour, sont, en observant que le facteur $\frac{m}{n}$ disparaît,

$$\left.\begin{array}{l} 2c(H+h') = 2c(Z-D')\tang\alpha + \frac{1}{3}fHZ^2(3b+Z) \\ 2c < \pi(2c\tang\alpha + fHZ(2b+Z)) \end{array}\right\}\ldots(36).$$

Il faut se rappeler que dans ces équations on a (fig. 9)

$D' = AR' = A\beta\sin\alpha$, $h' = \beta R' = A\beta\cos\alpha$, $Aa = K$, $A\beta = \frac{1}{3}K\frac{3R+2K}{2R+K}$.

Ces valeurs sont rigoureuses, mais dans la pratique on peut faire $A\beta = \frac{1}{2}K$.

Il faut se rappeler encore que c et K doivent être déterminés comme nous l'avons vu n° 41.

On peut, pour la facilité des architectes non géomètres, traduire ainsi les formules (36).

Il y aura équilibre de rotation, si le poids du dôme, multiplié par la hauteur du tambour et par cot α (α étant l'angle du joint des naissances avec la verticale), est égal au poids du dôme multiplié par l'épaisseur du tambour, diminuée du demi-joint des naissances, plus au poids du tambour multiplié par sa demi-épaisseur.

Il n'y aura pas glissement des pieds-droits sur leur base, si le poids du dôme multiplié par cot α, est plus petit que la fraction qui exprime le frottement, multipliée par la somme des poids du dôme et des pieds-droits.

Tout ce qui précède suppose que le cylindre creux ou tambour, est divisé en parties égales ou prismes par les plans verticaux qui partagent le dôme en secteurs : on sent bien que si le tambour était composé de pierres entrelacées et liées ensemble, soit par des barres de fer, soit par des saillies en forme de chevilles, soit par tout autre moyen, il n'y aurait plus lieu à aucun renversement. Si les assises du dôme étaient assemblées de la même manière, il n'existerait plus de poussée : il est étonnant que ce genre de construction ne soit pas généralement usité.

Pression. Quand on néglige le frottement, l'expression de la pression est $\frac{M}{\sin \alpha}$. On peut entendre par M le poids soit d'une portion de secteur, soit de la calotte entière du dôme, parce que la surface qui éprouve cette pression, augmente en même rapport que le nombre des secteurs. La pression peut encore être exprimée par $\frac{2mcds}{dy}$: on voit par là qu'elle augmente continuellement depuis la clef où elle est $2mc$, c'est-à-dire égale à la poussée horizontale.

48. *Formules pour toutes espèces de Dômes dans les différentes hypothèses.*

J'ai déjà dit que la théorie de la poussée des dômes était la même que celle des berceaux. Ainsi, en conservant toujours la notation du n° 26, et observant qu'ici M, N, S, au lieu d'être des aires, sont des volumes d'onglets, ou même des volumes de calotte, parce que la calotte est au tambour comme un secteur est au prisme vertical qui le supporte; on verra que dans toutes les hypothèses, les équations d'équilibre de rotation et du non-glissement du tambour, sont les suivantes :

$$\left.\begin{array}{r} H + hF + Mq + ND = bS + SZ + \frac{m}{3} fHZ^2 (3b + Z) \\ F < \pi[S + mfnZ(2b + Z)] \end{array}\right\} \ldots (37).$$

Ces équations sont les analogues des équations (22) trouvées pour les berceaux : tout se réduit à y substituer, pour avoir Z, les valeurs de F et α qui conviennent à l'hypothèse qu'on veut employer. Je vais les parcourir.

1°. Dans l'hypothèse du coin sans frottement, correspondante à celle de la Hyre, on suppose que le joint de rupture est à l'intersection de l'intrados par la diagonale du rectangle construit sur la montée et le rayon de la base; ainsi on a $F = M \cot \alpha$, $N = S - M$. Les autres quantités qui entrent dans les équations (37) se déduisent toutes des précédentes et de la figure de la voûte : il ne me reste plus que des substitutions à faire pour avoir Z.

2°. Si on considère la voûte entière comme un seul cône ou coin sans frottement, il faudra faire $N = 0$, $M = S$, $q = b + D'$,

$D=q$, $h=h'$. Cette hypothèse ne sera pas praticable lorsque la tangente de l'intrados est verticale aux naissances.

3°. Si on considère deux secteurs entiers et opposés, comme butant l'un contre l'autre à l'extrados de la clef, et s'appuyant contre le tambour, au point A, par l'arête de l'intrados; il faudra faire dans les formules (37), $h=0$, $N=0$, $M=S$, $q=b$, $F=S\frac{b-D}{a+k}$: alors D sera la distance de la montée à la verticale passant par le centre d'inertie du secteur entier. Cette hypothèse approchera plus de la vérité dans les dômes surbaissés que dans ceux qui sont surhaussés: dans ces derniers elle pourra être absurde, et donner $F=0$ ou F négatif, quand $D>b$; ce qui arrivera, si l'épaisseur de la voûte est considérable et augmente depuis la clef.

4°. Si on regarde chaque secteur comme étant d'une seule pièce, et qu'on prenne pour valeur de F, la force horizontale qu'il faudrait employer au milieu de la clef, pour soutenir le secteur en équilibre autour du point C, milieu du joint des naissances, il faudra faire dans les formules, $F=S\frac{b-D+D'}{a+\frac{1}{2}k-h'}$ $N=0$, $M=S$, $q=b+D'$, $h=h'$; D sera la distance de la montée au centre d'inertie du secteur entier. Cette hypothèse ne s'écartera jamais de la vérité, si l'extrados n'est pas très-aplati.

5°. Dans l'hypothèse plus rigoureuse du coin avec frottement, on aura (*voy.* n° 26) $F=M\cot(\theta+\alpha)$; il faudra chercher la valeur de α, qui rend F un *maximum*, en faisant $dF=0$. Regardant ensuite F comme constant, et considérant le secteur comme composé de deux portions dont l'une est adhérente au tambour, il faudra chercher le point où il faut appliquer F pour rendre Z un *maximum;* c'est-à-dire qu'il faudra chercher la valeur de α, qui rend $hF+Mq+MD$ un *maximum;* ce qui peut se trouver soit par le tâtonnement, soit directement par l'équation $Fdh+d(Mq)+d(ND)=0$. Ayant trouvé α, on substituera sa valeur, ainsi que celle de F précédemment trouvée, dans l'équation (37) qui fera connaître Z, puisqu'elle est censée ne renfermer que F, H, b, α et Z.

6°. Dans l'hypothèse des deux arcs-boutans indéterminés, on aura $F=\frac{Ml}{a+k-h}$ (*voy.* n° 27). On cherchera d'abord le *maximum*

de F, en faisant $dF = 0$; puis le *maximum* de Z, comme dans l'hypothèse précédente. On choisira ensuite le plus grand des deux *maximums* de Z fournis par les deux dernières hypothèses.

7°. On peut encore adopter une autre hypothèse qui participe des précédentes. Après avoir trouvé le *maximum* de F dans l'hypothèse du coin avec ou sans frottement, on peut, au lieu de chercher encore le *maximum* de Z, substituer tout de suite la valeur trouvée pour α et F dans l'équation (37) : cela revient à supposer que le coin de plus grande poussée est aussi celui qui a le plus grand moment relatif pour renverser le pied-droit; quoique cela ne soit pas vrai, il en résulte une valeur assez approchée pour Z.

Pression. Quant à la pression qui a lieu entre deux voussoirs quelconques d'un secteur, elle est la même que celle qu'exerce la calotte entière sur la zône conique qui la supporte. Tout ce que nous avons dit dans le n° 26, s'applique ici : il suffit de regarder M comme le volume de la calotte, et F comme le *maximum* de poussée exercé par le dôme dans tout son pourtour.

La distinction que nous avons faite entre les berceaux de la première espèce et ceux de la seconde, n'a pas pas lieu pour les dômes engendrés par l'intrados et l'extrados qui auraient formé un berceau de l'une ou l'autre espèce. Je vais prouver que la poussée qui, abstraction faite du frottement, a pour expression M cot α, est toujours nulle à la clef, à moins que le rayon de courbure n'y soit infini : en effet, l'expression du voussoir élémentaire de la clef, qui a la forme d'un petit cône tronqué dont le rayon de la petite base est $ds = \frac{mkds^2}{3r^2}(3r^2 + 3rk + k^2)$, expression dans laquelle r est le rayon de courbure à la clef; c'est la valeur de M à la clef. On a aussi en ce point

$$\text{tang}\,\alpha = d\alpha = d\left(\frac{dx}{dy}\right) \text{ et } r = \frac{ds}{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}, \text{ d'où } \frac{M}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{mkds}{3r}(3r^2 + 3rk + k^2),$$

quantité qui renfermant encore ds, fait voir que $\frac{M}{\text{tang}\,\alpha}$ ou la poussée exercée par le petit voussoir de la clef d'un dôme, est infiniment petite, à moins que r ne soit infini, auquel cas elle devient $\frac{0}{0}$, et peut être finie : cela n'empêche pas que la pression ne soit

soit toujours égale à la poussée horizontale qui a lieu aux naissances, laquelle est alors l'effet non de la clef, mais de la réaction des voussoirs inférieurs.

49. *Volume et centre d'inertie d'un onglet.*

L'application des formules du n° précédent exige la détermination préalable de M, N, D, l. Il est impossible de donner des formules qui dispensent de toute intégration, puisque les quantités ci-dessus dépendent de la figure de la voûte ; mais on peut du moins tracer la marche du calcul; c'est ce que je vais faire. M. Bossut, pour plus de commodité, substitue à l'onglet N, un prisme ayant même base et même hauteur. Outre que ce prisme est plus grand que l'onglet, leurs centres d'inertie sont placés bien différemment à l'égard de la montée : l'erreur qui résulte de cette fausse supposition est trop considérable pour être négligée, même dans la pratique (*voyez* Dynamique citée n° 24, page 416).

Il s'agit de trouver le volume M engendré par l'aire SS'FE (fig. 38), et celui N produit par la révolution de l'aire EFaA ; quoique la chose soit toujours possible, cependant pour simplifier un peu les calculs, j'imagine par le milieu R de EF, l'horizontale pqQ, et je substitue aux aires SS'FE, EFaA, les aires SS'pq, qpaA, qui sont très-sensiblement égales aux deux premières. Si l'on imagine deux sections horizontales infiniment proches, l'expression du volume de la tranche élémentaire du dôme, distraction faite de la partie vide, en conservant la notation convenue, sera $my'^2dx' - my^2dx$. Donc $m\int y'^2dx' - m\int y^2dx$ sera le volume de la calotte M, en prenant l'intégrale depuis la clef jusqu'à l'horizontale Qp qui est donnée de position : la même intégrale, prise jusqu'à la ligne des naissances, sera la valeur de S. La différence des deux intégrales donnera N. Il faut trouver ensuite la position du centre I de gravité du secteur infiniment petit, dont SS'pq est la section verticale moyenne, et du centre G de gravité de l'onglet correspondant à l'aire qpaA : imaginons deux sections horizontales infiniment proches ; chaque ordonnée, telle que pQ, décrit un petit secteur de cercle pQp' (fig. 38 *). Soit n, le nombre infiniment grand des secteurs pQp', compris dans le cercle entier dont pQ est le rayon ; on aura, pour le volume du petit prisme dont $pqq'p'$ est la base et dx l'épaisseur, l'expression

$\frac{my'^2dx' - my^2dx}{n}$: la somme de ces petits prismes qui composent l'onglet SS'pq, sera $\frac{m}{n}\int y'^2dx - \frac{m}{n}\int y^2dx$, en prenant l'intégrale jusqu'à l'ordonnée pQ.

Le moment du petit prisme, ayant pour base le secteur circulaire pQp' à l'égard de la montée passant par Q, est $\frac{m}{n}y'^2dx'.\frac{2}{3}y'$, ou $\frac{2m}{3n}y'^3dx'$; le moment du secteur vide qQq' est $\frac{2m}{3n}y^3dx$: donc le moment de la petite tranche $pqq'p'$, est $\frac{2m}{3n}y'^3dx' - \frac{2m}{3n}y^3dx$, et leur somme $\frac{2m}{3n}\int y'^3dx' - \frac{2m}{3n}\int y^3dx$. Divisant cette somme des momens par la somme des volumes de ces mêmes prismes trouvée plus haut, on aura $\frac{\frac{2}{3}\int y'^3dx' - \frac{2}{3}\int y^3dx}{\int y'^2dx' - \int y^2dx}$; cette quantité sera la distance QL, si l'intégrale est prise jusques à la ligne Qp : ce sera au contraire la valeur de OL' (distance de la montée au centre de gravité du secteur total), si l'intégrale est prise jusqu'à la ligne OA.

On verra aussi qu'on aura OL', en divisant la somme des momens des petits prismes compris dans l'onglet qpaA, par le volume de cet onglet : on a

$$qpa\text{A} = \text{SS}'a\text{A} - \text{SS}'pq = \text{OS}'a - \text{OSA} - \text{OS}'p + \text{QS}q.$$

Les secteurs dont ces aires sont les sections, fournissent une équation analogue. Maintenant, pour éviter la multitude des mots, désignons par le signe $\int'$ une intégrale prise jusqu'à la ligne OA, et par $\int$ l'intégrale prise jusqu'à la ligne Qp seulement, on verra, avec un peu d'attention, qu'on a les expressions suivantes :

dôme ayant pour demi-coupe verticale

$$SS'aA = S = m\int' y'^2 dx' - m\int' y^2 dx,$$

calotte ayant pour demi-coupe $SS'pq$, ou

$$M = m\int y'^2 dx' - m\int y^2 dx;$$

volume engendré par $qpaA$, ou

$$\left.\begin{aligned} N &= m(\int' y'^2 dx' - \int' y^2 dx - \int y'^2 dx' + \int y'^2 dx); \\ OL'' &= \frac{\frac{2}{3}\int' y'^3 dx' - \frac{2}{3}\int' y^3 dx}{\int' y'^2 dx' - \int' y^2 dx}, \\ QL &= \frac{\frac{2}{3}\int y'^3 dx' - \frac{2}{3}\int y^3 dx}{\int y'^2 dx' - \int y^2 dx}, \\ OL' &= \frac{\frac{2}{3}\int' y'^3 dx' - \frac{2}{3}\int' y^3 dx - \frac{2}{3}\int y'^3 dx' + \frac{2}{3}\int y^3 dx}{\int' y'^2 dx' - \int' y^2 dx - \int y'^2 dx' + \int y^2 dx}. \end{aligned}\right\} \ldots (38)$$

SECTION II.

Applications.

50. *Dôme d'épaisseur uniforme.* Il s'agit dans cet article du n° 45, dont nous avons vu que l'intrados générateur était, pour les dômes, ce que la chaînette est pour les berceaux; tout se réduit donc à appliquer convenablement les formules (36) du n° 47. La première chose à faire, est de chercher la valeur de C et tang α, qui entrent dans l'équation (36). Or, en retournant aux n°s 45 et 47, on reconnaîtra que la quantité c de l'équation (36) est la même chose que la quantité $\frac{1}{2c'}$ du n° 45 : on aura donc c, en déterminant c', comme nous l'avons vu n° 45, par la condition qu'on ait $x = \alpha O$ (fig. 37), ou $x = a + \frac{1}{2}k = a'$, quand $y = OR' = b + D' = b'$. On verra de même que tang $\alpha = \frac{dx}{dy}$ vaut ici $\frac{1}{2}e^{c'y^2} - \frac{1}{2}e^{-c'y^2}$: on a ainsi tout ce qui entre dans les formules (36), et il sera aisé d'en conclure Z.

51. *Dômes en cul-de-four.* On appelle cul-de-four, un dôme engendré par la révolution d'une demi-ellipse autour de son demi-axe vertical, ou plutôt par la révolution de deux courbes menées

parallèlement en dehors et en dedans de l'ellipse. Le cul-de-four est dit surhaussé ou surbaissé, suivant que la montée est plus grande ou plus petite que le rayon de la base : on voit que ces dômes sont de l'espèce de ceux que j'ai appelés non-équilibrés, et qui ne subsistent que par la liaison du ciment.

Je ferai usage dans cet article, des formules du nº 48, en suivant ce qui a été dit dans le 4°. de ce nº. En appelant s la surface engendrée par la révolution de l'ellipse $\alpha\mathfrak{C}$ (fig. 24), le volume du dôme sera très-sensiblement ks ; ainsi on aura $S = ks$. Faisant de plus, pour abréger, $b + \frac{1}{2}k = b'$, $a + \frac{1}{2}k = a'$, et faisant attention que $D' = \frac{1}{2}k$, les formules (37) deviennent

$$ksH\,\frac{b' - D}{a'} = ks(Z - \tfrac{1}{2}k) + \frac{m}{3}fHZ^2(3b + Z).$$

$$ks\,\frac{b' - D}{a'} < \pi\,[ks + fHZ(2b + Z)].$$

Il ne reste plus, pour pouvoir faire usage de ces formules, qu'à déterminer s et D. comme ce calcul est assez long, j'ai calculé deux tables qui en dispensent.

La première fait connaître $D = OG'$, relativement aux différentes grandeurs de la montée $O\alpha = a'$, dans la supposition du demi-arc horizontal $O\mathfrak{C} = b' = 1$. La seconde fait connaître la valeur correspondante de s.

En faisant attention que les surfaces semblables sont entre elles comme les quarrés des dimensions homologues, on aura la valeur de s qui convient au dôme proposé, en multipliant le signe S de la table par b^2. On verra aussi que pour avoir le D de la formule, il faut multiplier le D de la table par b'.

Supposons, pour faire une application, $OA = b = 20$, $OS = a = 14$, $SS' = k = 2$, d'où $a' = 15$, $b' = 21$; il faut chercher dans la table le point où la montée est les $\frac{15}{21}$ ou les 0,7143^{èmes} du rayon de la base, pour avoir les valeurs correspondantes de D et s, en prenant des parties proportionnelles : on trouvera $s = 5{,}1282$, $D = 0{,}7621$. Multipliant cette valeur de D par b' ou 21, et celle de s par b'^2 ou $\overline{21}^2$, on aura pour celles qu'il faut substituer dans les formules ci-dessus, $D = 16{,}00$, $s = 2261{,}4$. Le reste du calcul n'a plus rien d'embarrassant.

Observons que pour avoir les valeurs plus exactes de D et s, il faudrait employer la méthode d'interpolation, en prenant les différences premières et secondes des termes des tables, voisins de ceux entre lesquels on veut intercaler.

TABLE *de la distance de la montée à la verticale passant par le centre de gravité d'un secteur d'ellipsoïde.*

Oa ou montée.	D ou distance du centre de gravité.	Oa ou montée.	D ou distance du centre de gravité.	Oa ou montée.	D ou distance du centre de gravité.	Oa ou montée.	D ou distance du centre de gravité.
0,1	0,6746	0,8	0,7702	1,5	0,8091	2,2	0,8253
0,2	0,6902	0,9	0,7784	1,6	0,8123	2,3	0,8268
0,3	0,7070	1,0	0,7854	1,7	0,8151	2,4	0,8281
0,4	0,7229	1,1	0,7915	1,8	0,8176	2,5	0,8293
0,5	0,7372	1,2	0,7968	1,9	0,8198		
0,6	0,7498	1,3	0,8015	2,0	0,8218		
0,7	0,7608	1,4	0,8055	2,1	0,8237		

Si l'on voulait avoir la capacité recouverte par le dôme, on remarquerait qu'elle est les deux tiers du cylindre dont le diamètre est $2b$ et la hauteur a : elle est donc $\frac{2}{3} mab^2$.

TABLE *des surfaces des différentes ellipsoïdes.*

Oα ou montée.	S ou aire du dôme.	Oα ou montée.	S ou aire du dôme.	Oα ou montée.	S ou aire du dôme.	Oα ou montée.	S ou aire du dôme.
0,1	3,2361	0,8	5,4644	1,5	8,4592	2,2	11,6690
0,2	3,4356	0,9	5,8687	1,6	8,9088	2,3	12,1364
0,3	3,6970	1,0	6,2832	1,7	9,3623	2,4	12,6053
0,4	4,0009	1,1	6,7062	1,8	9,8186	2,5	13,0762
0,5	4,3359	1,2	7,1360	1,9	10,2774		
0,6	4,6948	1,3	7,5722	2,0	10,7393		
0,7	5,0721	1,4	8,0134	2,1	11,2032		

Observons encore que pour avoir Z dans la formule ci-dessus, il ne sera pas nécessaire de résoudre une équation du troisième degré ; on négligera Z dans le facteur $(3b + Z)$, et l'on aura une première approximation, en résolvant l'équation du second degré : on mettra la valeur numérique trouvée pour Z dans le même facteur seulement, et l'on résoudra de nouveau l'équation du second degré, ce qui donnera une seconde valeur de Z plus approchée ; on pourrait continuer ainsi :

52. *Dôme hémisphérique.* Le dôme hémisphérique n'étant qu'un cas particulier des dômes en cul-de-four, il suffit de faire $a' = b'$ dans les calculs du n° précédent, et $D = 0{,}7854\, b'$. Remarquons encore qu'ici on a S, d'une manière directe et plus rigoureuse qu'en multipliant la surface moyenne par l'épaisseur : en effet, il sera aisé de voir qu'on a le volume du dôme, en retranchant la demi-sphère vide de la demi-sphère totale, ce qui donne

$$S = \tfrac{2}{3}m(b+k)^3 - \tfrac{2}{3}mb^3 = \tfrac{2}{3}m(3b^2+3bk+k^2)k.$$

Faisant ces substitutions dans les formules du n° précédent, on a les

suivantes pour le dôme hémisphérique,

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}4495kH(3b^2+3bk+k^2)=2{,}0944k(3b^2+3bk+k^2)(Z-\frac{1}{2}k)+\frac{m}{3}fHZ^2(3b+Z) \\ 0{,}4495k(3b^2+3bk+k^2)<\pi[2{,}0944k(3b^2+3bk+k^2)+mfHZ(2b+Z)] \end{array}\right\}(a).$$

Je vais chercher actuellement l'équation d'équilibre de rotation dans l'hypothèse du coin sans frottement, c'est-à-dire, en concevant qu'une calotte dont l'angle générateur est α, repose sur la surface conique du reste du dôme, et fait effort pour l'écarter.

La figure 39 représente une section verticale du dôme et du tambour ; $\alpha\beta$ est le profil d'une sphère intermédiaire passant par les centres de gravité de tous les voussoirs. Ces voussoirs sont de petites pyramides tronquées inégales, mais qu'on peut supposer égales, quand il s'agit de trouver leurs centres communs de gravité. La valeur de $O\alpha$ sera sensiblement $O\alpha = b+\frac{1}{2}k = b'$: si on veut l'avoir rigoureusement, il faut chercher le centre de gravité d'une pyramide tronquée infiniment petite, dont la hauteur est k, et l'on trouvera

$$O\alpha = r = \frac{3}{4}\,\frac{B^4-b^4}{B^3-b^3} = \frac{3}{4}\,\frac{B^3+B^2b+Bb^2+b^3}{B^2+Bb+b^2}.$$

La première chose à faire est de chercher la distance $OG'=D$ de la montée au centre G d'inertie de l'onglet qui a pour profil EFaA ; ce centre sera le même que celui de la portion de sphère intermédiaire dont nous avons parlé. Soit (fig. 39 *) $\alpha\beta\beta'$ le triangle sphérique déterminé dans la sphère intermédiaire par les deux plans verticaux qui comprennent l'onglet, il s'agira de trouver le centre G de gravité de la portion RR'$\beta'\beta$ de ce triangle sphérique.

Je fais pour simplifier $Oa=b+k=B$: soit aussi $\beta M = s$. Cela posé, on aura (fig. 39)

secteur sphérique, ou volume engendré par SOE $=\frac{2}{3}mb^3(1-\cos\alpha)$;
secteur sphérique, ou volume engendré par S'OE $=\frac{2}{3}mB^3(1-\cos\alpha)$;
calotte ou volume engendré par SS'FE $=\frac{2}{3}m(1-\cos\alpha)(B^3-b^3)=M$;
hémisphère vide, ou volume engendré par OSA...... $=\frac{2}{3}mb^3$;
hémisphère total, ou volume engendré par OS'a...... $=\frac{2}{3}mB^3$;
dôme entier $=\frac{2}{3}m(B^3-b^3)$:
volume engendré par EFaA $=\frac{2}{3}m(B^3-b^3)\cos\alpha=N$;

Zône engendrée par l'arc $Mm = 2myds$. Donc n étant le nombre infiniment grand des secteurs, on aura aire $Mmm'M' = \frac{2myds}{n}$; son moment à l'égard de l'axe $= \frac{2my^2ds}{n}$; somme de ces momens $= \frac{2m}{n}\int y^2ds$; quantité qui, étant intégrée depuis $\mathcal{C}$ jusqu'à R, est

$$\frac{mr^2}{n}(\sin\alpha\cos\alpha . r + s), \quad \text{ou} \quad \frac{mr^3}{n}\left[\sin\alpha\cos\alpha + \tfrac{1}{2}m\left(1 - \frac{\alpha}{90^\circ}\right)\right],$$

$\left(\text{en observant que } s = \frac{\frac{1}{2}mr(90^\circ - \alpha)}{90^\circ}\right)$.

Si on divise cette somme des momens par la surface $RR'\mathcal{C}\mathcal{C}'$, qu'on verra être $\frac{2mr.\overline{OQ'}}{n}$ ou $\frac{2mr^2\cos\alpha}{n}$, on trouvera pour la distance cherchée à l'axe du centre d'inertie de l'aire courbe $RR'\mathcal{C}'\mathcal{C}$, ou de l'onglet engendré par $EFaA$, l'expression

$$OG' = D = \tfrac{1}{2}r\left(\sin\alpha + \tfrac{1}{2}m\frac{1 - \frac{\alpha}{90^\circ}}{\cos\alpha}\right).$$

On verra aussi qu'on a $RR' = r\cos\alpha$, $OR' = r\sin\alpha$.

De toutes ces données, on conclut aisément la formule suivante pour l'équilibre de rotation

$$M(H + r\cos\alpha)\cot\alpha = M(b + Z - \sin\alpha) + N(b + Z - D) + \tfrac{1}{3}mfHZ^2(3b + Z)\ldots(b).$$

Si l'on fait $\alpha = 45^\circ$, on aura

$$D = 0{,}9089r, \quad \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071;$$

c'est l'hypothèse en usage; mais ma formule dispense de chercher le centre de gravité de l'onglet, ce qui est assez pénible.

Si l'on veut, conformément à ce qui a été dit dans le 7°. du n° 48, prendre pour la poussée grand F, celle du coin qui exerce la plus grande, on aura, dans l'hypothèse du coin sans frottement, $F = M\cot\alpha$. En jetant les yeux sur l'expression rapportée ci-dessus, on verra que la quantité qui doit être un *maximum*, est ici $\cot\alpha(1 - \cos\alpha)$, ou $\cot\alpha - \frac{\overline{\cos\alpha}^2}{\sin\alpha}$. Différentiant et divisant par

par $d\alpha^2$, on a, réduction faite, $\overline{\cos\alpha}^3 - 2\cos\alpha + 1 = 0$, équation dont les trois racines sont $\cos\alpha = 1$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. La première, ainsi que celles données par $dz = 0$ et $\cos\alpha = 0$, indiquent un *minimum :* celle qui donne le *maximum* cherché, est $\cos\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) = 0{,}618$, d'où $\alpha = 51^\circ\ 50'$: c'est là l'angle qui donne le coin de plus grande poussée.

Cette valeur de α, étant substituée dans l'équation (b), donnera une valeur de Z plus approchée, mais qui ne sera pas son vrai *maximum*, puisqu'il faudrait encore chercher le point d'application le plus favorable pour la poussée F, regardée comme constante.

La formule (2) peut être traduite de la manière suivante pour les praticiens.

Il y aura équilibre de rotation, si le poids du dôme, multiplié par la hauteur du tambour et par le nombre 0,2146, est égal au poids du dôme multiplié par l'épaisseur du tambour diminuée de la demi-épaisseur du dôme, plus au poids du tambour multiplié par sa demi-épaisseur.

Il n'y aura pas glissement du tambour, si le produit du poids du dôme par le nombre 0,2146, est plus petit que le frottement multiplié par la somme des poids du dôme et du tambour.

53. *Dôme du Panthéon français.* Ce dôme (fig. 58) est engendré par la révolution de deux paraboles, dont l'une forme la surface d'intrados, et l'autre celle d'extrados. En faisant $OS' = A$, $OS = a$, $Oa' = B$, $AO = b$, la parabole d'extrados aura pour équation $'y^2 = \frac{B^2 x'}{A}$, et celle d'intrados, $y^2 = \frac{b^2}{a} x$; d'où l'on tire (conformément au n° 29)

$$'y^2 dx' = \frac{2A\,'y^3 dy'}{B^2},\quad 'y^3 dx' = \frac{2A\,'y^4 dy'}{B^2},\quad y^2 dx = \frac{2ay^3 dy}{b^2};$$

$$y^3 dx = \frac{2ay^4 dy}{b^2}.$$

J'intègre ces équations, et ayant $Qp = B'$, $Qq = b'$; je mets dans les intégrales successivement B et B' pour y', ainsi que b et b' pour y. Par là, j'ai les deux espèces d'intégrales $\int'$, $\int$ des formules

38 du n° 49, qui deviennent

$$S = \tfrac{1}{2} mAB^2 - \tfrac{1}{2} mab^2,$$

$$M = \tfrac{1}{2} \frac{mA'B^4}{2B^2} - \frac{ma'b^4}{2b^2},$$

$$N = m\left(\tfrac{1}{2} AB^2 - \tfrac{1}{2} ab^2 - \frac{A'B^4}{2B^2} + \frac{a'b^4}{2b^2}\right);$$

$$OL'' = \frac{8(AB^3 - ab^3)}{15(AB^2 - ab^2)},$$

$$QL = \frac{8\left(\frac{A'B^5}{B^2} - \frac{a'b^5}{b^2}\right)}{15\left(\frac{A'B^4}{B^2} - \frac{a'b^4}{b^2}\right)},$$

$$OL' = \frac{8\left(AB^3 - ab^3 - \frac{A'B^5}{B^2} + \frac{a'b^5}{b^2}\right)}{15\left(AB^2 - ab^3 - \frac{A'B^4}{B^2} + \frac{a'b^4}{b^2}\right)}.$$

Les dimensions du dôme sont $b = 32$ pieds, $B = 35$, $a = b\sqrt{3}$, $= 55{,}425$, $A = 56{,}925$, $AD = H = 44$.

Pour avoir, d'après la règle usitée, la position E du joint de rupture EF, on imagine un rectangle dont OA et OS sont deux côtés; la diagonale menée par le point O, détermine le point E sur l'intrados : on trouve ici que $EP = 19{,}84$. Le joint EF étant perpendiculaire à l'intrados, la position de la ligne pQ est déterminée, et l'on trouve $pQ = B' = 21{,}51$, et $qQ = b' = 19{,}22$, $S'P = 22{,}81$, $OQ = 34{,}253 = h$, $AR'' = q = 11{,}224$.

On a de plus $\cot \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{2ay}$; d'où, pour le joint EF, $\cot \alpha = 0{,}4806$, et pour le joint Aa, $\cot \alpha = 0{,}2887$.

Si, conformément au 1°. du n° 48, on adopte l'hypothèse usitée du coin déterminée par la diagonale menée du point O, on trouvera $Z = 1{,}3$.

Si, conformément au 2°. du n° 48, on considère le dôme entier comme un seul coin, on trouve $Z = 5{,}9$.

Si, conformément au 3°. du n° 48, on considère deux secteurs entiers buttant à l'extrados de la clef et à l'intrados des naissances, on trouve $Z = 2{,}96$.

Si on prend pour arcs-boutans à la clef la portion de secteur

SSTE, en regardant le reste du secteur comme adhérent au tambour, on trouve une quantité négative pour Z, ce qui signifie que l'arc-boutant ne saurait renverser le reste du secteur à cause de son adhérence, si petite que soit l'épaisseur Z. Cette hypothèse devient absurde dans le dôme proposé.

Si, conformément au 4°. du même n°, on considère le secteur entier comme un arc-boutant pouvant tourner autour du point $\mathcal{C}$, milieu du joint des naissances, on trouve $Z = 4{,}04$, résultat plus probable.

M. Bossut a trouvé, dans la première hypothèse, 3,25 au lieu de 1,3 : voici les causes de cette différence. Premièrement, nous avons vu qu'il a substitué au secteur EFaA, un autre secteur très-différent en volume et par la position de son centre d'inertie : secondement, il s'est trompé d'un tiers dans le volume de la calotte; car il retranche le paraboloïde vide d'un paraboloïde extérieur, qui ne repose pas sur la même section horizontale : troisièmement, il a fait entrer dans le calcul, la lanterne ou cylindre creux qui entoure la partie supérieure du dôme, ainsi que l'attique ou espèce de tour annulaire qui repose sur le tambour. Je n'ai pas tenu compte de cette lanterne et de cet attique, parce qu'il aurait fallu connaître leurs dimensions et leur position : au reste il est toujours aisé d'y avoir égard. L'un de ces corps s'ajoute à la calotte, et l'autre au tambour; ce sont deux forces dont les momens se calculent comme nous l'avons fait pour le dôme et pour le tambour.

Observons, en finissant cet article, que si l'architecte du Panthéon eût été géomètre, au lieu de faire décroître l'épaisseur du dôme depuis les naissances, il eût fait le contraire; car nous avons vu dans le chapitre précédent, que lorsque l'intrados est parabolique, l'épaisseur doit augmenter depuis les naissances, et le dôme se terminer en flèche.

SECTION III.

Du Tambour d'égale résistance et du minimum *des matériaux.*

54. *Tambour d'égale résistance.*

Le problème dont il s'agit ici est l'analogue de celui du n° 38.

On demande la figure qu'il faut donner au tambour pour qu'il résiste également dans tous ses points au renversement, en supposant qu'il puisse se rompre par assises horizontales, et que la partie vide du tambour soit cylindrique.

Imaginons par le pôle du dôme une infinité de plans verticaux : ces plans partageront le dôme en un nombre n infiniment grand de secteurs ; ils partageront aussi le tambour en un nombre d'onglets qui étaient des prismes, quand le tambour était un cylindre creux.

Soit (fig. 32) une de ces sections verticales qui, par sa révolution autour de la montée, engendre le dôme et le tambour. En imaginant une section horizontale, elle sera représentée par la figure 33, et le petit trapèze ABB'A' sera la section de l'onglet du tambour compris entre les deux plans verticaux élevés sur OB et OB'.

Soit toujours F la poussée horizontale que le dôme entier exerce dans son pourtour, $\frac{F}{n}$ sera la poussée appliquée en E contre l'onglet du tambour ; $\frac{S}{n}$ sera le poids du secteur du dôme qui presse en E l'onglet : deux autres forces concourent avec la dernière pour s'opposer au renversement autour du point N, de la portion d'onglet engendrée par l'aire AENQ : ces deux forces sont les poids de cette même partie d'onglet, et la force d'adhérence g, qui unit cette partie supérieure de l'onglet à la partie qui est en-dessous de la section horizontale NQ. Il faut, pour l'équilibre du système, que le moment de la poussée, à l'égard du point extérieur N d'une section horizontale quelconque, soit égal à la somme des trois forces verticales dont nous venons de parler.

En conservant la notation du n° 38, on trouvera, comme nous l'avons déjà dit au n° 47, aire ABB'A' $= \frac{m}{n} z(2b + z)$.

En imaginant une autre section horizontale passant à la distance du de la première, le poids d'une tranche élémentaire d'onglet ayant pour base ABB'A', sera $\frac{m}{n} fz(2b + z)\, du$.

La distance AG (fig. 33) du point A au centre d'inertie de cette tranche, qui est un petit trapèze, sera AG $= \frac{1}{3} z \frac{3b + 2z}{2b + z}$.

La somme des momens de toutes ces tranches, à l'égard de l'axe AD (fig. 32), sera $\int ABB'A'.\overline{AG}$, c'est-à-dire $\frac{m}{3n}\int\int(3bz^2+2z^3)du$.

Divisant cette somme des momens par la somme $\frac{m}{n}\int\int du\,(2bz+z^2)$ des tranches ou volume de l'onglet engendré par AENQ, on aura pour la distance du centre de gravité C de cette portion d'onglet à la ligne AD, $QG' = \frac{\int du\,(3bz^2+2z^3)}{3\int du\,(2bz+z^2)}$, $NG' = z - QG'$.

Le moment de la portion d'onglet engendrée par AENQ, à l'égard du point N de rotation, sera

$$\frac{mf}{n}\int du(2bz+z^2)\left(z-\frac{\int du\,(3bz^2+2z^3)}{3\int du\,(2bz+z^2)}\right), \text{ ou.......}$$
$$\frac{mfz}{n}\int du(2bz+z^2) - \frac{mf}{3n}\int du(3bz^2+2z^3).$$

g étant la force d'adhérence qui a lieu pour une aire $=1$, la somme de ces forces, distribuées sur la section ABB'A' de rupture, est g.ABB'A', c'est-à-dire $\frac{mg}{n}(2bz+z^2)$. La résultante de ces forces agit à la distance BG (fig. 33) $= \frac{1}{3}z\,\frac{3b+z}{2b+z}$: leur moment, à l'égard du point N, est donc $\frac{mg}{n}(3bz^2+z^3)$.

Égalant le moment de la poussée du secteur du dôme, lequel est $\frac{uF}{n}$, à la somme des momens des trois forces verticales trouvées ci-dessus, on a l'équation d'équilibre suivante, dans laquelle n ne se trouve plus :

$$uF = S(z-D) + \tfrac{1}{3}mg(3bz^2+z^3) + mfz\int du\,(2bz+z^2) - \tfrac{1}{3}mf\int du\,(3bz^2+2z^3) \ldots (a).$$

Je différencie deux fois de suite cette équation pour la débarrasser du signe $\int$, en regardant dz comme constant; j'ai, toute réduction faite,

$$[mf(bz^2+\tfrac{1}{3}z^3)-F]\,d^2u + 2mf(2bz+z^2)\,dzdu + 2mg\,(b+z)\,dz^2 = 0 \ldots (b).$$

Pour intégrer cette équation, il faut faire $du = pdz$, et il vient $dp + Zpdz + Z'dz = 0$, dans laquelle Z, Z' sont des fonctions de z, et qu'on pourra intégrer par les méthodes connues. On déterminera les deux constantes comme dans le n° 38.

Nous avons supposé que chaque onglet du tambour était d'une seule pièce, ensorte que l'adhérence d'une molécule à l'autre est la même dans toute la hauteur. Mais presque toujours chaque onglet est composé de plusieurs assises, ou lits de pierres posées les unes sur les autres; alors l'adhérence est presque nulle d'un lit à l'autre : ainsi on aura une solution plus conforme à la réalité, en faisant g très-petit, ou même nul dans les calculs précédens.

La solution que M. Bossut a donnée de ce problème est erronée; il s'est trompé dans la détermination de la distance du centre de gravité de l'onglet à l'égard de la ligne AD : il faut supposer $2y^3$ dans son expression au lieu de y^3.

55. *Minimum des matériaux.*

Les dômes sont encore susceptibles d'un perfectionnement analogue à celui que nous avons déterminé n° 39, pour les berceaux. On peut se proposer cette question : Connaissant la hauteur du tambour, le rayon du vide, la nature de l'intrados et celle de l'extrados, trouver quelles doivent être la montée du dôme et l'épaispaisseur du tambour, pour que le tout étant en équilibre, la totalité des matériaux du dôme et du tambour soit un *minimum*.

On voit qu'ici la quantité qui doit être un *minimum* est......... $S + mf HZ(2b + Z)$, dans laquelle il ne faudra faire varier que la montée a et l'épaisseur Z du tambour, après y avoir mis, pour S, sa valeur en fonction de a, b et k, donnée par la figure du dôme. L'équation $ds + 2mf HdZ(b + Z) = 0$, devra être combinée avec celle d'équilibre de rotation, pour en tirer les valeurs cherchées de a et Z.

CHAPITRE V.

DES VOUTES IRRÉGULIÈRES, OU DONT LES JOINTS NE SONT PAS NORMAUX A L'INTRADOS.

SECTION PREMIÈRE.

Des Voûtes dont les joints concourent en un même point.

56. LIGNES *de courbure des surfaces courbes. Conditions que doivent remplir les joints.*

Je rapporte ici quelques réflexions de M. Monge, sur la théorie des surfaces courbes, parfaitement applicables à la théorie des voûtes : elles sont extraites d'un excellent Mémoire inséré dans le deuxième cahier du Journal de l'École polytechnique.

« Après avoir conçu, par un point quelconque d'une surface » courbe, une normale à cette surface, si l'on veut passer au point » infiniment voisin par lequel la nouvelle normale soit dans le » même plan que la première, et la rencontre par conséquent en » un point, on peut toujours le faire dans deux directions : ces » deux directions sont toujours à angle droit sur la surface, et » elles sont les seules qui donnent ce résultat, si l'on en excepte » le cas particulier de la sphère pour toute la surface, et quelques » points remarquables pour d'autres, tels que les sommets des sur- » faces de révolution.

» Les deux points dans lesquels chaque normale est rencontrée » par les deux normales infiniment voisines, sont les centres des

» deux courbures de la surface dans le point que l'on considère ; » les distances de ces deux points à celui de la surface, sont les » rayons des deux courbures ; et les directions rectangulaires dans » lesquelles on passe de la normale aux deux normales consécu- » tives qui la coupent, sont les directions de ces courbures.

» Si l'on conçoit que le point de la surface se meuve de manière » qu'à chaque instant des directions des deux courbures, il suive » celle qui est dans un premier sens, et qu'il continue ainsi de » se mouvoir autant que le permettra l'étendue de la surface, » la courbe qu'il parcourra sera celle de l'une des courbures. » En concevant par chaque point une courbe parcourue de cette » manière, on aura la suite des lignes de la première courbure, qui » diviseront l'aire de la surface courbe en zônes, suivant une pre- » mière direction. Si l'on conçoit que le point de la surface, au lieu » de suivre dans son mouvement la direction de la première cour- » bure, suive au contraire celle de la seconde, il parcourra une » courbe de la seconde courbure, et cette courbe coupera toutes » celles de la première à angles droits. En concevant pour chaque » point une courbe parcourue de cette seconde manière, on aura » la suite des lignes de la seconde courbure, qui diviseront l'aire » de la surface en d'autres zônes, suivant une nouvelle direction. » Enfin, chacune des lignes de l'une de ces deux suites étant per- » pendiculaire à toutes celles de l'autre suite, et réciproquement, » il s'ensuit que ces deux suites de ligne de courbure diviseront » l'aire de la surface courbe en élémens qui seront tous rectan- » gulaires : cela peut être rendu sensible sur les surfaces de ré- » volution prises pour exemple.

» Sur les surfaces de révolution, on ne peut passer d'un point » à un autre pour lequel les deux normales sont dans un même » plan, à moins qu'on ne suive ou la direction du méridien, ou » celle du parallèle qui passe par ce point : suivant toute autre » direction, les deux normales ne se rencontreraient pas, puisque, » étant des méridiens différens, elles ne passeraient pas par le même » point de l'axe. Les méridiens sont donc la suite des lignes d'une » des courbes, et les parallèles la suite de celles de l'autre : chaque » courbe de l'une de ces suites est perpendiculaire à toutes celles

» de

» de l'autre; et les deux suites divisent l'aire de la surface en élé-
» mens que l'on peut regarder comme rectangulaires.

» Si la normale se meut de manière que, sans cesser d'être perpendiculaire à la surface, elle parcoure une ligne de courbure dans chaque instant de son mouvement, elle se portera sur une des deux normales infiniment voisines qui la coupent, et elle engendrera une surface qui sera développable, qui sera partout dans une de ses lignes de courbure.

» Si pour le même point, la normale parcourt la ligne de l'autre courbure, elle engendrera de même une autre surface développable normale à la surface courbe, et qui rencontrera la première en ligne droite et à angles droits. Si l'on conçoit donc une semblable surface pour chacune des lignes de courbure de l'une et de l'autre suites, on aura deux suites de surfaces développables normales à la surface courbe, et telles que chacune de celles d'une des suites rencontrera toutes celles de l'autre suite en lignes droites et à angles droits. Toutes ces surfaces développables normales diviseront l'espace en élémens, indéfinis dans le sens de la longueur de la normale, infiniment étroits dans le sens des deux courbures, et terminés par quatre plans rectangulaires entre eux, et par quatre arêtes indéfinies et en lignes droites.

» Chacune des surfaces développables normales d'une des suites a une arête de rebroussement particulière, et qui, étant le lieu des intersections successives des normales consécutives pour une même ligne de courbure, est le lieu des centres d'une des courbures pour tous les points de cette ligne. Si l'on considère donc le système des arêtes de rebroussement de toutes les surfaces développables normales d'une même suite, ce système formera une surface courbe qui sera le lieu de tous les centres d'une des courbures de la surface courbe. Les deux surfaces des centres de courbure d'une même surface courbe sont, par rapport à elles, ce que les développées ordinaires sont par rapport aux courbes; dans quelques cas particuliers, elles sont distinctes l'une de l'autre, et peuvent avoir leurs équations séparées : en général elles sont les nappes différentes d'une même surface courbe, et elles sont toutes deux exprimées par une même équation d'un degré pair.

» Les résultats que nous venons d'exposer succinctement, sont » susceptibles de plusieurs applications utiles aux arts; une des plus » frappantes a pour objet la manière de diviser une voûte en » voussoirs par des joints.

» Les joints des voûtes doivent satisfaire en même temps à un » assez grand nombre de conditions, dont les principales sont, » 1° d'être partout perpendiculaires à la surface de la voûte, afin » que les angles des deux voussoirs consécutifs étant égaux entre » eux, ils résistent également à leur rupture dans l'action que ces » voussoirs exercent l'un sur l'autre; 2°. d'être perpendiculaires » entre eux, par la même raison; 3° d'être engendrés par le mou- » vement d'une ligne droite; car les surfaces engendrées de cette » manière, sont les seules qui soient susceptibles d'une exécution » exacte; et il faut que les joints des voussoirs contigus soient par- » faitement exécutés, parce que de légères incorrections entraîne- » raient la rupture de l'un de ces voussoirs; 4° d'être formés par des » surfaces développables, afin que les panneaux puissent être appli- » qués sur les différentes faces, et en donner les contours d'une » manière rigoureuse.

» On voit que toutes ces conditions seraient remplies en même » temps, si l'on divisait la surface de la voûte par des lignes de l'une » et de l'autre des deux courbures, qui fussent espacées entre elles » d'une quantité finie dépendante des matériaux, et si les joints » étaient formés par les surfaces développables normales à la surface » de la voûte.

» D'ailleurs si les joints étaient apparens sur la surface de la » voûte, ils y traceraient des courbes toutes rectangulaires entre » elles, et qui, dépendant de la nature même de la surface, en » rendraient la génération plus prononcée. Enfin, ces lignes elles- » mêmes diviseraient la surface de la voûte en compartimens » rectangulaires, et susceptibles d'une décoration propre à la » surface.

» C'est vers cette solution générale que les artistes s'étaient tou- » jours dirigés; ils ne l'avaient atteinte que pour les cas faciles des » surfaces cylindriques, des surfaces coniques et de celles de révo- » lution. Quant aux autres surfaces courbes dont ils ne connaissaient » pas les lignes de courbure, ils les excluaient presque générale-

» ment de la composition des voûtes, lors même que les circons-
» tances l'exigeaient impérieusement; et c'est à cela principalement
» qu'on doit attribuer les mauvais effets que produisent en général
» dans l'architecture, les morceaux de traits de coupe des pierres,
» parce que, pour rendre un trait exécutable, on choisit pour la
» voûte une surface qui n'est pas toujours celle que la nature des
» choses commanderait. »

57. *Berceau dont les joints concourent à un centre commun.*

Les principes du numéro précédent doivent être observés autant qu'on le peut : néanmoins il est des circonstances ou des considérations plus puissantes qui peuvent déterminer à préférer une voûte dont les joints ne remplissent pas la condition d'être normaux à la surface courbe. Dans cet article, il sera question des berceaux dont les joints ont un centre commun et ne sont pas perpendiculaires à l'intrados. Lorsque l'intrados est circulaire, la double condition a lieu; mais c'est le seul cas où cela arrive : dans tous les autres, on peut toujours trouver un extrados qui rende la voûte équilibrée; c'est de quoi je vais m'occuper.

Soit (fig. 40) ASA′ la courbe donnée d'intrados, et $aS'a'$ l'extrados qu'il faut trouver pour former un berceau équilibré, tous les joints NM devant concourir à un point commun O.

Soit $SOM = \varepsilon$, $ON = u$, $OM = R$, $OS = a$, $SS' = k$, $OS = a + k = A$, $SS'NM = M$, $MN = k$.

En raisonnant ici comme nous l'avons fait dans le n° 2 du premier chapitre, on verra d'abord qu'on a

$$\text{aire } MNnm = dM = \tfrac{1}{2} K (2R + K)\, d\varepsilon;$$

de plus, la voûte devant être équilibrée, on a pour exprimer cette condition, l'équation

$$M = c \tang \varepsilon$$

(c étant une constante quelconque); d'où

$$dM = \frac{c\, d\varepsilon}{\cos^2 \varepsilon}.$$

Egalant ces deux valeurs de dM et mettant u pour $R+K$, on a

$$u^2 = R^2 + \frac{2c}{\cos^2 \varepsilon}.$$

La constante c se détermine par la condition qu'au point S on a

$$\cos \varepsilon = 1\ ,\quad R = a,\quad u = A\ ;$$

ce qui donne

$$2c = A^2 - a^2;$$

d'où enfin

$$u^2 = R^2 + \frac{A^2 - a^2}{\cos^2 \varepsilon} \ldots (39).$$

Tout est connu dans cette équation, puisque le rayon vecteur R est donné par l'équation d'intrados en fonction de ε : il sera donc aisé d'avoir u et par conséquent de construire l'extrados.

Supposons, par exemple, que l'intrados soit (fig. 31) une ligne droite horizontale, on aura

$$R = a \cdot \frac{1}{\cos \varepsilon},$$

et l'équation (39) devient

$$u = \frac{A}{\cos \mathcal{C}};$$

c'est-à-dire que l'extrados est aussi une ligne droite horizontale ; ainsi que nous l'avons vu n° 37.

Supposons en second lieu que l'intrados (fig. 40) soit composé de deux lignes droites faisant avec la verticale, un angle OSM $= \mathcal{C}$, on trouvera

$$R = \frac{a \sin \mathcal{C}}{\sin (\mathcal{C} + \varepsilon)},$$

et en substituant cette valeur de R dans l'équation (39) ci-dessus ; on aura l'équation polaire de l'extrados.

Il ne sera pas plus difficile, dans tous les autres cas, d'avoir l'équation polaire de l'extrados en u et ε, puisqu'on connaît celle de l'extrados aussi polaire entre R et ε.

A l'égard de la poussée de ces sortes de berceaux, il est évident, puisqu'ils sont équilibrés, qu'elle est M cot ε, c'est-à-dire c, ou $\frac{1}{2}(A^2 - a^2)$, ou $ak + \frac{1}{2}k^2$. Quant à l'équation d'équilibre de rota-

tion, il serait superflu de la rapporter, puisqu'elle est la même que celle du n° 24.

Observons que les berceaux dont il s'agit ici offrent plus de facilité pour l'épure, parce que tous les joints concourent à un centre commun : un autre avantage, c'est de pouvoir employer la ligne droite pour intrados ; c'est à l'Architecte à peser ces avantages avec l'inconvénient qui résulte de ce que les joints ne sont pas perpendiculaires à l'intrados.

58. *Dômes dont les joints concourent à un centre commun.*

La figure 41 représente une section verticale du dôme proposé et de son tambour. On a, comme dans le numéro précédent,

$$\text{aire } \mathrm{MN}nm = \tfrac{1}{2}\mathrm{K}(2\mathrm{R}+\mathrm{K})\,d\varepsilon.$$

On verra aisément que la distance GG′ du centre d'inertie de cette aire à la montée est

$$\mathrm{R}\sin\varepsilon + \frac{1}{3}\mathrm{K}\frac{3\mathrm{R}+2\mathrm{K}}{2\mathrm{R}+\mathrm{K}}\sin\varepsilon \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}\sin\varepsilon\,\frac{3\mathrm{R}^2+3\mathrm{RK}+\mathrm{K}^2}{2\mathrm{R}+\mathrm{K}}.$$

Si on multiplie l'aire ci-dessus par $2m.\mathrm{GG}'$, on aura, d'après le principe de la méthode centrobarique, le volume d'une assise élémentaire de voussoirs compris dans une section horizontale du dôme : ainsi, en appelant M le volume de la calotte correspondante, on aura pour l'expression de cette assise,

$$d\mathrm{M} = 2m.\mathrm{GG}'.\mathrm{MN}nm = \tfrac{2}{3}\,m\mathrm{K}d\varepsilon\sin\varepsilon\,(3\mathrm{R}^2+3\mathrm{RK}+\mathrm{K}^2),$$

ou, à cause de $\mathrm{R}+\mathrm{K}=u$,

$$d\mathrm{M} = \tfrac{2}{3}\,md\varepsilon.\sin\varepsilon\,(u^3-\mathrm{R}^3).$$

D'un autre côté on a pour exprimer la condition d'équilibre entre toutes les assises, l'équation

$$\mathrm{M} = c\,\mathrm{tang}\,\varepsilon \quad \text{ou} \quad d\mathrm{M} = \frac{cd\varepsilon}{\cos^2\varepsilon}.$$

Egalant ces deux expressions de $d\mathrm{M}$, on a pour l'équation polaire

de l'extrados générateur,

$$u^3 = R^3 + \frac{3c}{2m \sin \varepsilon \, \overline{\cos \varepsilon}^2} \ldots\ldots\ldots (40).$$

Il reste à déterminer la constante c. Nous retrouverons ici la singularité que nous avons déjà remarquée dans les dômes du chapitre III : si on veut déterminer c par la valeur a que reçoit R au point S, ou $\sin \varepsilon = 0$, on ne trouve pour c que zéro, ou bien $\frac{0}{0}$ si l'on fait u infinie au point S. Cela vient de ce que le dôme est terminé à la clef par une flèche. Mais on peut se servir du point A des naissances pour déterminer c. En effet, si α est alors la valeur de ε, R′ celle de R, et u' celle que l'on veut donner à u, l'équation (40) donnera

$$c = \tfrac{2}{3} m \sin \alpha \, \overline{\cos \alpha}^2 ('u^3 - 'R^3,$$

quantité finie. Mettant cette valeur de c dans l'équation (40′), on aura

$$u^3 = R^3 + \frac{\sin \alpha \, \overline{\cos \alpha}^2 ('u^3 - 'R^3)}{\sin \varepsilon \, \overline{\cos \varepsilon}^2} \ldots\ldots (40'),$$

équation au moyen de laquelle on pourra connaître u, et construire l'extrados, puisqu'on connaîtra l'équation polaire de l'intrados en R et ε.

A l'égard de la poussée des dômes en question, elle est toujours c, et l'équation d'équilibre de rotation est la même que nous avons donnée dans le chapitre IV.

Au reste, on peut faire sur les avantages et les inconvéniens de ces sortes de dômes, les mêmes observations que dans l'article précédent. Ajoutons que dans la pratique, on peut remplacer une portion infinie de la flèche par un poids d'une grandeur finie, comme un globe, un cylindre, une pyramide, etc.

Dans la figure 41, l'intrados générateur est une ligne droite horizontale, et par conséquent la surface d'intrados un plan ou cercle horizontal. Ce dôme est l'analogue du berceau plat équilibré. Il offre le moyen curieux de recouvrir une tour ronde par un plafond circulaire équilibré.

Dans la figure 36, l'intrados générateur est circulaire : nous en avons déjà parlé n° 43. On peut déduire l'équation polaire de l'extrados de la formule (34) ; mais on y parvient plus simplement par l'équation (40′) du présent article. En effet, R est ici constant : c'est le rayon même de la sphère d'intrados, et l'on a $R' = R$ (α sera l'angle du rayon vecteur u' dans le point où l'on veut que l'épaisseur du dôme soit $u' - R$). Ainsi l'on voit qu'il suffit de faire R constant dans l'équation (40′), pour avoir l'équation polaire de l'extrados générateur du dôme dont la surface d'intrados est sphérique.

SECTION II.

Des Voûtes à base régulière et symétrique.

59. *Etant donnée la surface d'intrados, trouver celle d'extrados.*

Quelle que soit la base recouverte par le dôme, si la surface d'intrados est donnée, on peut toujours trouver la surface d'extrados qui rend la voûte équilibrée : il suffit d'imaginer par la montée ou axe vertical, une infinité de plans verticaux qui partageront la voûte en secteurs ou voûtes élémentaires partielles. On calculera l'épaisseur K pour chaque point d'un secteur quelconque, comme nous l'avons vu dans le n° 43, et les voussoirs de chaque voûte élémentaire seront en équilibre entre eux. Il n'est pas moins évident que la base étant supposée régulière et symétrique, deux voûtes élémentaires et opposées se feront mutuellement équilibre à la clef : cela se conçoit facilement quand la base est terminée par une ligne courbe comme une ellipse ou un polygone d'un nombre pair de côtés. Il en sera de même quand la base sera un polygone régulier d'un nombre impair de côtés : alors il faut pour concevoir l'équilibre, se représenter trois, ou cinq, ou sept, etc. voûtes élémentaires symétriquement placées se buttant toutes ensemble à la clef, suivant que le polygone de la base a trois, cinq, sept, etc. côtés.

La poussée de chaque voûte élémentaire se calculera comme nous l'avons fait dans le chapitre IV ; mais on sent qu'ici les secteurs

étant inégaux, leurs poussées seront aussi inégales, ainsi que l'épaisseur correspondante du tambour. Le polygone extérieur de la base du tambour aura une figure analogue à celle du polygone intérieur.

Il manquera une perfection à ces sortes de dômes : les joints ne seront point normaux à la surface d'intrados; leur succession ne formera pas les lignes de courbure dont nous avons parlé dans le n° 56. Cependant les premières suites de joints qui sont dans les plans verticaux seront agréables à l'œil, puisqu'elles formeront des méridiens partant du pôle commun : on pourra même rendre régulière la seconde suite de joints. Il suffit pour cela d'imaginer un certain nombre de plans horizontaux qui coupent la surface d'intrados. Si le nombre des méridiens est assez grand, les petits plans inclinés qui séparent les voussoirs d'une voûte élémentaire se confondront sensiblement avec les cercles parallèles dont j'ai parlé; ensorte que la seconde suite de joints présentera à l'œil l'aspect d'une section horizontale. Il restera toujours l'inconvénient que les quatre petits plans qui comprennent un voussoir, ne seront point normaux à la surface d'intrados, si ce n'est pour le cas de l'ellipsoïde dans les deux sections qui passent par les axes.

60. *Cas où l'épaisseur du dôme doit être uniforme.*

Si l'épaisseur de la voûte doit être constante, il résulte du numéro précédent que chaque voûte élémentaire partielle doit avoir pour section verticale la courbe du n° 45, à laquelle j'ai donné par analogie le nom de chaînette croissante, parce qu'elle engendre le dôme d'épaisseur égale à base circulaire, de la même manière que la chaînette ordinaire engendre, par son mouvement parallèle, le berceau d'épaisseur égale. Toutes ces chaînettes croissantes qui composeront le dôme, auront la même montée avec des bases différentes. La constante c' qu'on pourrait appeler le paramètre de la chaînette croissante, sera variable pour chaque section. Chaque voussoir sera compris entre deux plans ou méridiens et deux petits plans inclinés perpendiculaires au méridien moyen, intermédiaire entre les deux méridiens précédens.

On pourrait, d'après la génération précédente, trouver l'équation

tion de la surface d'intrados, lorsqu'on connaît la base que doit recouvrir le dôme. Si cette base est une ellipse et que la montée soit donnée, le problème est déterminé.

On peut encore recouvrir une base quelconque par une autre surface courbe qui formera un dôme d'épaisseur égal et différent du précédent : cette seconde surface doit être engendrée par une chaînette ordinaire qui se meut parallèlement à elle-même.

Imaginons une ligne horizontale quelconque passant par le centre de figure de la base et par l'un des angles du polygone régulier, sur cette ligne un plan vertical, et dans ce plan une ligne courbe quelconque que j'appelle directrice. Imaginons maintenant une infinité de chaînettes ordinaires posées verticalement l'une contre l'autre, s'appuyant par leurs extrémités sur le contour de la base, et ayant toutes leurs sommets dans la directrice ci-dessus. Il est évident que la réunion de toutes ces chaînettes dont le paramètre c ou le rayon de courbure au sommet est variable, formera un dôme équilibré; car il sera composé d'une infinité de tranches verticales parallèles dont chacune est un petit berceau en chaînettes. Tous ces petits berceaux se soutiendraient isolément, si on supprimait ceux qui sont voisins. La surface d'intrados présentera l'aspect d'une suite de chaînettes verticales parallèles, et l'on pourra faire rencontrer dans des sections horizontales les joints de lit de tous les voussoirs : ce qui formera des compartimens agréables à l'œil, mais qui n'auront pas l'avantage d'être perpendiculaires aux faces des voussoirs.

Si la base est renfermée par une courbe régulière, comme une ellipse, on pourra exprimer analytiquement l'équation de l'intrados.

On peut encore obtenir par le moyen de la chaînette ordinaire, un autre dôme équilibré différent du précédent. Imaginons une chaînette ordinaire ayant son sommet à la clef donnée de position, et s'appuyant sur deux points symétriques du contour de la base : si on fait mouvoir cette chaînette parallèlement à elle-même, de manière que son axe soit toujours vertical et que ses extrémités touchent toujours le contour de la base, elle engendrera un dôme équilibré ; mais ici la directrice que suit le sommet de la chaînette n'est plus arbitraire comme précédemment, quoiqu'elle soit toujours une courbe tracée dans un plan vertical. Cette seconde génération

est plus simple que la première, en ce que le paramètre c est constant : c'est un cas particulier du précédent, où chaque section verticale était une chaînette d'un rayon de courbure variable pour son sommet, tandis que dans le second cas, chaque berceau élémentaire n'est qu'une portion plus ou moins grande de la même chaînette.

On voit par ce qui précède, qu'une base donnée peut être découverte par une infinité de dômes équilibrés, la montée étant la même. En premier lieu, on peut se donner la surface d'intrados et trouver celle d'extrados correspondante. En second lieu, si l'épaisseur doit être uniforme et que la base soit par exemple un cercle, on engendre un dôme équilibré par la révolution d'une chaînette croissante. On engendre encore un dôme équilibré par la *juxtaposition* d'une infinité de chaînettes ordinaires et différentes dont les sommets sont sur une directrice quelconque. Enfin, on a encore un dôme équilibré par le mouvement parallèle d'une même chaînette ordinaire touchant toujours le même contour de la base.

Mais il manque à tous ces dômes la condition d'avoir les joints normaux à la surface d'intrados. Il reste donc encore ce problème à résoudre.

Etant donnée la base quelconque d'un dôme et la surface d'intrados, trouver la surface d'extrados qui forme un dôme équilibré, avec cette condition que tous les joints des voussoirs soient normaux à la surface d'intrados.

Par exemple, si la base est une ellipse, et la surface d'intrados un ellipsoïde dont les deux sections verticales passant par les axes de la base, soient aussi des ellipses. M. Monge a bien déterminé les deux lignes de courbure qui doivent former les joints, mais il reste à trouver la surface d'extrados; car si l'on fait l'épaisseur constante, l'ellipsoïde de M. Monge ne sera pas un dôme équilibré. Pour avoir la surface d'extrados qui formerait avec cet ellipsoïde pour intrados, un dôme équilibré, il faut se figurer un petit coin rectangulaire ou voussoir compris entre quatre lignes de courbure du n° 56. Le principe qu'il faut employer est que ce petit voussoir doit être en équilibre entre les quatre autres qui le pressent dans deux sens perpendiculaires, de la même manière qu'il l'était dans un sens seulement pour les cas des berceaux et des dômes à base

circulaire. On sent que la difficulté sera bien plus grande, parce que chaque voussoir repose sur un plan incliné, et qu'il faut faire entrer dans le calcul les équations des lignes de courbure. Quand on aura surmonté toutes les difficultés, on n'aura pas encore le dôme le plus parfait, puisqu'il n'aura pas une épaisseur uniforme, et que les joints ne seront pas normaux à l'extrados. Je vais, dans le numéro suivant, exposer de nouvelles considérations qui fourniront d'autres dômes équilibrés d'épaisseur égale.

61. *Dôme d'épaisseur uniforme, à base elliptique.*

Soit (fig. 42) AEA'E' l'ellipse que doit recouvrir le dôme dont on ne connaît que la montée $OS = a$ (fig. 43). Soit KL la développée du quart d'ellipse AE et NI', nI' deux rayons de courbure infiniment proches. Imaginons qu'on ait divisé tout le contour de l'ellipse en petits arcs tels que Nn, et mené tous les rayons de courbure tels que NI; qu'ensuite sur toutes ces lignes NI', on ait élevé des plans verticaux. Soient (fig. 44) NPII', npII' deux de ces plans infiniment voisins, dont la commune section est la verticale II'; il faut redresser ces plans par la pensée en les faisant tourner autour des horizontales I'N, I'n, jusqu'à ce que les lignes IP, Ip deviennent horizontales. Il faut concevoir ensuite deux arcs de chaînette croissante PN, pn dans les plans verticaux ci-dessus. Ces arcs ont leur tangente horizontale dans les points P et p, dont les points P' et p' de la figure 42 sont les projections horizontales : ensorte que PNnp est un élément de la surface du dôme reposant par le petit arc Nn sur le tambour, et s'appuyant par son extrémité supérieure Pp contre un pareil élément symétriquement placé.

La figure 43 représente une section verticale du dôme et du tambour, faite par un plan vertical passant par le grand axe de l'ellipse ; kk' est une ligne horizontale passant par la clef donnée de position ; Kk, K'k' sont deux verticales élevées sur les origines K et K' des quatre branches de la développée de l'ellipse; kA, k'A' sont deux arcs de chaînette croissante. Il faut relever par la pensée la ligne kk' au-dessus de sa projection horizontale KK', et concevoir que de tous les points de cette ligne kk', que j'appellerai crête du dôme ou ligne des sommets, on ait mené de part et d'autre des arcs de chaînette croissante, verticaux et perpendiculaires à tous les

points N de l'ellipse, tels que PN de la figure 44. La surface courbe qui résultera de cette génération, en lui donnant une épaisseur uniforme, formera un dôme équilibré.

En effet, les voussoirs d'un secteur quelconque, tel que PN*np*, seront équilibrés entre eux et formeront une petite voûte partielle; car si (fig. 44) on faisait tourner autour de la ligne II′ comme axe vertical, la ligne horizontale IP et l'arc vertical PN, on engendrerait un plateau, plus une zône de dôme à base circulaire dont le secteur PN*np* serait un élément ou voûte partielle. Il n'est pas moins évident, à cause de la figure symétrique du dôme, que tous les secteurs étant indépendans les uns des autres et ne se pressant qu'à la crête, il y aura aussi équilibre dans le sens horizontal : quatre secteurs symétriquement placés dans les quatre quarts de l'ellipse, produiront deux à deux, et en sens contraire, une pression horizontale dirigée suivant la crête et détruite par une pression égale et opposée. Les plans verticaux élevés sur les normales à l'ellipse de la base, déterminent par leur rencontre avec le plan vertical passant par le grand axe, les secteurs du dôme et le système de l'une des lignes de courbure. L'autre ligne de courbure est formée par le mouvement d'une ligne qui, toujours perpendiculaire à la surface courbe, ferait le tour du dôme en coupant perpendiculairement chaque méridien, et en décrivant une petite surface conique dans chaque secteur et variable pour chacun.

On voit que le problème a plusieurs solutions, et qu'on pourrait, par exemple, après avoir tracé une courbe quelconque ou directrice dans le plan vertical passant par le grand axe, lui faire aboutir à tous les points du contour de la base des secteurs verticaux de chaînette croissante, comme nous avons fait.

Il n'entre pas dans mon objet de discuter, sous le rapport de la décoration, le dôme que je viens de décrire : je me bornerai à observer qu'il est parfaitement régulier, symétrique, et que sa crête horizontale paraît devoir produire un effet agréable : ces deux extrémités indiquent naturellement la position de deux lustres.

Il reste à donner l'équation de la courbe donnée par la section d'un plan vertical perpendiculaire à l'ellipse de la base. J'ai supposé que cette courbe était celle que j'ai appelée chaînette crois-

sante dans le n° 45 : elle est bien de la même famille, mais elle renferme une constante de plus qui est différente pour chaque point de l'ellipse. Dans le dôme à base circulaire, la même courbe engendre tous les secteurs par sa révolution autour de la montée qui est l'axe commun, et l'on a $x = o$ quand $y = o$ (x étant l'abscisse verticale, et y l'ordonnée horizontale). Ici, au contraire, chaque secteur est engendré par une courbe qui sans être différente, a cependant des constantes différentes : ce n'est plus la montée qui est l'axe commun de révolution ; chaque secteur a son axe particulier qui est la verticale II', égale à la montée, et passant par l'extrémité I du rayon de courbure. De plus, le dôme ne comprend que la partie du secteur comprise entre l'ellipse de la base et le plan vertical élevé sur le grand axe. En comptant les x sur l'axe variable II' de position, on a $x = o$ quand $y = \mathrm{IP}' = i$.

En retournant donc au n° 46, et déterminant par cette condition la constante de l'équation

$$\frac{y^2}{2c} = \log(p + \sqrt{1 + p^2}) + \text{constante},$$

on aura

$$\frac{y^2 - i^2}{2c} = \log(p + \sqrt{1 + p^2}).$$

En achevant les calculs comme nous avons fait dans l'article cité, on a pour l'équation de la courbe génératrice d'un secteur quelconque, c'est-à-dire pour l'équation d'une section verticale normale quelconque,

$$x = \frac{c'}{1} \int dy\,(y^2 - i^2) + \frac{c'^3}{1.2.3}\int dy\,(y^2 - i^2)^3$$
$$+ \frac{c'^5}{1.2.3.4.5}\int dy\,(y^2 - i^2)^5 + \text{etc.} + c'' \ldots (a),$$

équation qui s'intègre aisément, puisque tous les termes étant developpés, sont des monomes, et que la quantité i est constante pour chaque section. On détermine l'une des deux constantes par la condition qu'on ait $x = o$ quand $y = i$, et l'autre constante par la condition qu'on ait pour chaque section $x = a$ quand $y = n + i = \mathrm{R}'$, en faisant (fig. 42) $\mathrm{NP}' = n$, $\mathrm{NI}' = \mathrm{R}'$.

En intégrant l'équation (a) et déterminant c'' comme il vient d'être

dit, on a

$$x = \frac{c'}{1}\left(\tfrac{1}{3}y^3 - i^2y\right) + \frac{'c^3}{1,2.3}\left(\tfrac{1}{7}y^7 - \tfrac{3}{5}i^2y^5 + i^4y^3 - i^6y\right)$$
$$+ \frac{'c^5}{1.2.3.4.5}\left(\tfrac{1}{11}y^{11} - \tfrac{5}{9}i^2y^9 + \tfrac{10}{7}i^4y^7 - \tfrac{10}{5}i^6y^5 + \tfrac{5}{3}i^8y^3 - i^{10}y\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots c'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

$$C' = \frac{c'}{1}\cdot\frac{1.2}{1.3}i^3 + \frac{'c^3}{1.2.3}\cdot\frac{1.2.4.6}{1.3.5.7}i^7 + \frac{'c^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1.2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11}i^{11} + \text{etc.},$$

ou

$$C' = \tfrac{2}{3}c'i^3 + \frac{4.6}{3^2.5.7}\,'c^3i^7 + \frac{6.8.10}{3^2.5^2.7.9.11}\,'c^5i^{11} + \frac{8.10.12.14}{3^2.5^2.7^2.9.11.13.15}\,'c^7i^{15} + \text{etc.}$$

$$C' = \frac{3a}{'R^3} - \frac{27.a^3}{14.'R^5} + \frac{27^2.a^5}{\overline{14}^2.'R^6} - \frac{27^3.a^7}{\overline{14}^3.'R^9} + \ldots\ldots (\textit{voyez } n^\circ\ 45).$$

Au moyen de ces expressions, on a tout ce qu'il faut pour déterminer la courbe d'une section verticale quelconque. Imaginant ensuite la montée divisée en un certain nombre de parties par des plans horizontaux, ces plans détermineront dans chaque courbe verticale ou chaînette croissante, un même nombre de points dont les projections horizontales formeront des courbes fermées (fig. 45) qui seront les projections des sections horizontales. Les normales et les ovales de cette même figure suffiront pour construire l'épure de la voûte.

Il resterait pour compléter la discussion du dôme dont il s'agit, à donner l'équation des ovales, ainsi que celle de la surface courbe du dôme dont tous les points étant assujétis à la même loi de continuité, sont susceptibles d'être représentés par la même équation.

Je dois prévenir deux objections qui pourraient embarrasser.

1°. On pourrait dire que les voussoirs qui touchent la ligne des sommets *kk'* étant triangulaires, ils sont trop faibles pour contrebalancer les voussoirs rectangulaires sur lesquels ils reposent; mais il faut faire attention que ces triangles sont des infiniment petits du second ordre, que plus on prend les arcs N*n* petits, plus ces triangles diminuent de grandeur et qu'ils finissent par s'anéantir, ensorte que quand le nombre des secteurs est infiniment grand, les voussoirs qui touchent la crête sont, sinon rectangulaires, du moins aussi pesans que si on leur ajoutait le triangle infiniment petit

du second ordre qui a été séparé par le plan vertical de la crête : ainsi l'objection disparaît.

2°. On peut dire que les joints sont bien partout des portions de surface développables, ainsi que cela doit être (n° 56); mais que les voussoirs qui touchent la ligne des sommets, n'ont pas leurs quatre faces perpendiculaires entre elles, et que ce sont des trapèzes : je réponds que cela ne peut être différemment, et qu'il en est de même dans les dômes à base circulaire dont les voussoirs qui entourent le pôle sont triangulaires, tandis que tous les autres sont rectangulaires. Pour éviter l'inconvénient de ces voussoirs triangulaires dans ces dômes, on forme la clef de leur réunion, et cette clef a la figure d'un petit sphéroïde ou d'une calotte. Dans le dôme à base elliptique, la ligne des sommets n'est qu'une suite de pôles, et on peut, par analogie, appeler clef la calotte ovoïdale qui a pour projection le plus petit des ovales, celui qui renferme la ligne kk' des sommets ou lignes des pôles.

A mesure que l'ellipse de la base approche du cercle, la ligne horizontale des pôles diminue : enfin quand on fait $i = o$ et $kk' = o$ dans les calculs précédens, on a le dôme à base circulaire.

Il manque au dôme que je viens de décrire, comme à toutes les voûtes dont j'ai parlé dans cette section, la condition d'avoir les joints normaux à la surface courbe, du moins ceux qui sont dans les plans verticaux. Il faudrait, pour que cette condition eût lieu, que les ovales formées par les projections des sections horizontales, fussent des courbes parallèles à l'ellipse, c'est-à-dire des développantes de la même développée. Cela existerait si toutes les sections verticales étaient des arcs égaux de la même courbe. Par exemple, si l'on imagine qu'ayant fixé au point N du rayon de courbure NT, un arc vertical de courbe quelconque, on développe les rayons successifs de courbure, l'arc ci-dessus engendrera par son mouvement une surface qui sera telle, que toutes les projections des sections horizontales formeront des ovales parallèles à l'ellipse. Tous les joints de l'une et l'autre courbures auront les conditions du n° 56, c'est-à-dire seront des surfaces développables, normales et perpendiculaires entre elles; mais la surface courbe n'admettra pas une épaisseur constante, quand même on choisirait pour la courbe gé-

nératrice la chaînette croissante, parce que les constantes de cette courbe doivent varier pour chaque axe de rotation des secteurs. On pourra, il est vrai, trouver l'épaisseur que doit avoir chaque voussoir pour l'état d'équilibre, en considérant chaque secteur en particulier, comme nous l'avons dit au commencement de cette section.

Il résulte de ce qui précède, qu'il est impossible de trouver une surface pour laquelle l'épaisseur soit constante, et dont les sections verticales normales à l'ellipse soient aussi des lignes de courbure normales à la surface. Il faudra donc renoncer à l'une ou l'autre de ces deux conditions, toutes deux desirables. J'ai décrit plusieurs dômes équilibrés d'épaisseur constante, mais dans lesquels les joints verticaux ne sont point normaux à la surface. Il reste à résoudre ce problème : Faire un dôme à base elliptique, dont la montée est donnée, d'une épaisseur uniforme, et dont tous les joints soient des surfaces développables normales au dôme et perpendiculaires entre eux. Aucune des deux lignes de courbure ne pourra être des sections verticales, ainsi que je l'ai fait voir, à moins qu'on ne fasse les deux axes de l'ellipse égaux. Dans ce cas particulier, la section verticale deviendra une ligne de courbure et sera une chaînette croissante passant par le pôle. Ce problème est le plus difficile qu'on puisse proposer sur cette matière. Il est probable que M. Monge s'en serait occupé s'il y eût songé. Il serait surperflu de nous occuper davantage des bases en polygone régulier. On sent assez, d'après ce qui précède, ce qu'il y a à faire. J'ajouterai seulement que si l'on fait pénétrer deux berceaux en chaînette, on obtient deux voûtes analogues aux voûtes d'arête et en arc de cloître, qui sont équilibrés dans tous leurs points, excepté dans les intersections qui séparent les quatre nappes : ces deux espèces de voûtes seront très-préférables aux voûtes ordinaires d'arêtes et en arc de cloître.

APPENDICE

APPENDICE.

Observations préliminaires.

On a donné le nom d'anse de panier à une courbe AS*a* (fig. 46), composée de trois, cinq, sept, etc. arcs de cercles, qui dans leurs points de réunion M, M′, *m*, *m′* (fig. 50) ont la même tangente : on emploie les anses de panier dans la construction des ponts, à cause de la facilité de l'épure. La difficulté de tracer des arcs elliptiques leur a fait préférer un assemblage de petits arcs de cercles plus faciles à décrire. Les anses de panier ont encore d'autres avantages : elles laissent passer un plus grand volume d'eau, l'ouverture du pont et la montée restant les mêmes : elles sont pour l'ordinaire plus gracieuses à l'œil que l'ellipse.

Voici comment on peut concevoir la génération d'une anse de panier. Soit (fig. 50) A l'une des naissances du pont, S la clef, OS la montée : imaginons un polygone $AA'A''A'''A^{iv}T$ d'un nombre quelconque de côtés, dont le premier AA' est pris sur la ligne des naissances, et le dernier $A^{iv}T$ se termine à la montée prolongée. Si l'on imagine un fil enveloppant ce polygone, et qu'on le développe par son extrémité A, il tracera successivement plusieurs arcs de cercle AM, MM', $M'M''$, $M''M'''$, $M'''S$, ayant leurs centres en A', A'', A''', A^{iv}, T. Un polygone pareil engendrera de l'autre côté de la montée des arcs égaux aux précédens, et l'ensemble de ces arcs sera ce qu'on appelle une anse de panier. Ainsi une anse de panier n'est autre chose que la développante d'un polygone ; elle est dite à 3 centres, à 5, à 7, etc., suivant le nombre d'arcs dont elle est formée : cette courbe ressemble à une ellipse, en ce

qu'elle est perpendiculaire sur la ligne des naissances et sur la montée.

On voit que sur une même base et une même montée, on peut tracer une infinité d'anses de panier. Le problème est d'autant plus indéterminé, que le nombre des centres est plus grand. On peut assujétir l'anse à certaines conditions, comme de passer par des points donnés, d'avoir les arcs d'un nombre de degrés donnés, d'avoir les rayons dans tels ou tels rapports, et le problème peut ainsi devenir déterminé. Il serait impossible de discuter toutes les combinaisons qu'on peut adopter : ce que nous dirons dans les problèmes suivans suffira pour guider dans tous les cas.

PROBLÈME PREMIER.

Des anses de panier à trois centres.

Si le polygone n'a que deux côtés AA', A'T, il n'y aura que trois centres A', T, *a'*, et l'anse est dite à trois centres (fig. 46). Le problème, comme on voit, consiste à trouver sur la ligne des naissances et sur la montée prolongée, deux points A' et T, tels que l'on ait

$$AA' + A'T = TS :$$

cela peut se faire d'une infinité de manières par la construction suivante.

Prenez une portion quelconque SS' de la montée SO, et portez-la de A en A' : menez la ligne A'S', et sur le milieu I de cette ligne, élevez la perpendiculaire IT, qui rencontrera en T la montée prolongée : le point T sera le centre de l'arc moyen M*m*, et A' celui de l'arc extrême AM.

En effet, par cette construction, on a

$$A'T = S'T \quad \text{et} \quad AA' = SS' :$$

donc

$$AA' + A'T = TS,$$

comme l'exige la question.

Le point S' pouvant être pris à volonté dans l'etendue de SO, il

s'ensuit que le problème a une infinité de solutions renfermées entre les deux limites $AA' = 0$ et $AA' = SO$: ces deux cas extrêmes sont représentés par les figures 47 et 48. Dans le second cas de la figure 48, l'arc AM est de 90°, et l'arc MS dégénère en ligne droite. Il est aisé de voir que dans ce cas, l'espace AMSO est le plus grand possible ; d'où l'on conclut que plus l'anse de panier approchera de cette limite, plus le volume d'eau qui peut passer sous l'arche sera grand.

Pour avoir l'expression algébrique des deux rayons AA' et ST, appelons le premier r et le second R : faisons de plus $AO = b$, $SO = a$, on aura

$$A'T = \sqrt{(b-r)^2 + (R-a)^2},$$

et l'équation $AA' + A'T = ST$ devient

$$r + \sqrt{(b-r)^2 + (R-a)^2} = R,$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{b^2 + a^2 - 2br}{2a - 2r};$$

cette équation fait voir que lorsque $r = 0$, on a $R = \frac{b^2 + a^2}{2a}$, c'est le cas de la figure 47, et que r ne peut pas être plus grand que a, puisqu'alors R est infini : c'est le cas de la figure 48. Je ne m'arrête pas à démontrer que l'équation $R = \frac{b^2 + a^2 - 2br}{2a - 2r}$ fournit la construction que j'ai donnée plus haut.

Pour avoir le rapport entre le rayon extrême r et l'angle AA'M, soit cet angle égal ϵ, on aura

$$OT = \frac{\sin \epsilon}{\cos \epsilon}(b-r), \quad A'T = \frac{b-r}{\cos \epsilon};$$

l'équation $AA' + A'T = TS$ devient

$$r + \frac{b-r}{\cos \epsilon} = a + \frac{\sin \epsilon}{\cos \epsilon}(b-r);$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{a \cos \epsilon + b \sin \epsilon - b}{\cos \epsilon + \sin \epsilon - 1}.$$

Nous venons de voir que plus l'angle ϵ approche d'être droit,

plus R est grand, et plus le volume d'eau compris sous l'arche est considérable : il est néanmoins une considération d'un autre genre qui doit empêcher de prendre R trop grand. L'élégance et la grace du coup-d'œil exigent que les deux rayons r et R diffèrent le moins possible, afin qu'on ne passe pas dans le point M de raccordement des deux arcs, d'une grande courbure à une autre beaucoup plus petite. Pour remplir cette condition, il faut que $\frac{R}{r}$, c'est-à-dire, $\frac{b^2 + a^2 - 2b^2}{2ar - 2r^2}$ soit un *minimum* : égalant à zéro la différentielle de cette quantité, on en tire

$$r = \frac{b^2 + a^2 - (b - a)\sqrt{(b^2 + a^2)}}{2b},$$

et ensuite

$$R = \frac{b^2 + a^2 + (b - a)\sqrt{b^2 + a^2}}{2a}.$$

J'observe que je n'ai pas fait précéder le radical du double signe $\pm$, parce que la solution indiquée par le signe que j'ai omis, ne résout pas la question présente.

PROBLÈME II.

Etant donnée l'ouverture, la montée ainsi que le nombre de degrés des arcs, excepté les deux derniers voisins de la clef, d'une demi-anse à un nombre quelconque de centres, tracer cette anse.

Soit $AMM'M''M'''$.....S la demi-anse à tracer (fig. 50). Les conditions à remplir sont, 1°. que le contour du polygone $AA'A''A'''A''T$ soit égal à TS; 2°. que le polygone n'ait point d'angles rentrans : j'en ai déduit la construction suivante.

1°. Prenez une portion SS' de la montée, et portez-la de A en A' : le point A' sera le premier centre.

2°. Faites l'angle AA'M égal à l'angle donné, et ayant prolongé MA' jusques en k sur la montée prolongée, marquez un point A'' qui sera le second centre cherché s'il remplit les deux conditions suivantes, savoir, 1°. si ayant porté A'A'' de S' en S'', le point A'' se trouve en dessous de l'horizontale passant par S''; 2°. si KS'' est plus petit que KA''.

3°. Faites l'angle $MA''M'$ égal à l'angle donné, et ayant prolongé $M'A''$ jusques en k' sur la montée prolongée, prenez à volonté une partie $A''A'''$ que vous porterez de S'' en S'''; ce point A''' sera le troisième centre, s'il réunit les même conditions que ci-dessus, savoir, 1°. si ce point A''' est en dessous de S'''; 2°. si $K'S'''$ est plus petit que $K'A'''$.

4°. Vous marquerez de la même manière d'autres centres A^{IV}, A^{V}, etc. en les assujétissant aux mêmes conditions que ci-dessus.

5°. Enfin pour marquer le dernier centre T ou celui qui doit être sur le prolongement de la montée, il suffira de faire $TA^{IV} = TS^{IV}$, ce qui peut se faire sans tâtonnement en menant la ligne $A^{IV}S^{IV}$, et élevant sur son milieu une perpendiculaire qui déterminera le point T par sa rencontre avec la montée prolongée.

Il est à remarquer que par cette construction, on n'est pas maître de se donner l'avant-dernier angle $M'''A^{IV}M'''$, car il déterminerait un autre point T qui ne serait pas également éloigné de A^{IV} et de S^{IV}, comme cela doit être.

Il est aisé de démontrer que les points A', A'', A''', A^{IV}, etc. doivent remplir les conditions prescrites. En effet, 1°. A'' doit être plus bas que S''; car si ces deux points étaient sur la même ligne horizontale, comme le reste du contour $A''A''' + A'''A^{IV} + A^{IV}T$ doit être égal à $S''T$, cela ne pourrait jamais avoir lieu, à moins que T ne fût à une distance infinie. 2°. Il n'est pas moins évident que KS'' doit être plus petit que KA''; car si l'on avait $KS'' = KA''$, tout autre point quelconque T en dessous de K ne pourrait donner un contour $TA^{IV}A'''A''$ aussi long que TS'', parce que ce contour étant toujours plus petit que $TK + KA''$, serait aussi plus petit que $TK + KS''$: donc quand $KS'' = KA''$, le point K est le dernier centre et le polygone se termine là : donc pour le prolonger plus loin, il faut que KS'' soit plus petit que KA''.

On démontrera les deux mêmes conditions pour les autres angles saillans A''', A^{IV}, etc. du polygone.

PROBLÈME III.

Des Anses à cinq centres.

La construction générale que nous avons donnée dans le problème précédent, s'applique au cas présent. On reconnaîtra qu'il faudra, pour que le problème soit possible, que l'angle donné AA'M (fig. 49) soit tel que KS' soit plus petit que KA'.

Si au lieu de se donner l'angle AA'M, on voulait partir d'un point donné T pour le centre moyen, il faudrait d'abord, pour que le problème fût possible, que ce point T fût plus près de A que de S; car s'il était à égale distance, ce serait le cas de la figure 47.

Voici donc comment on s'y prendrait.

1°. On prendrait une portion SS' de la montée que l'on porterait de A en A' pour avoir le premier centre A', et il faudrait que T fût encore plus près de A' que de S'.

2°. Il s'agirait ensuite de trouver dans l'angle A'oT, un point A" tel que la somme de ses distances aux deux points A' et T fût égale à TS'. Plusieurs points remplissent cette condition ; ils sont tous placés sur une ellipse dont A' et T sont les foyers, et TS' la longueur du grand axe. Pour avoir un de ces points, il faut marquer un point S", décrire du point A' comme centre, un arc avec le rayon A'A" = S'S", et ensuite du point T, comme centre, avec un rayon TS" = TA", décrire un second arc qui déterminera le centre cherché A" par son intersection avec le premier, si elle a lieu dans l'angle A'OT.

En traçant l'ellipse dont nous avons parlé, on aurait sans tâtonnement tous les points qui peuvent être des centres A" : ils sont tous placés sur l'axe elliptique compris dans l'angle A'OT, et l'un de ces points peut être placé de manière que l'angle AA'M soit d'un nombre donné de degrés.

Si l'on voulait que les trois arcs AM, MM', M'S fussent d'un nombre donné de degrés, on diminuerait le nombre de tâtonnemens par la méthode analytique suivante.

Soit $AO = b$, $OS = a$, $AA' = r$, $ST = R$, $AA'M = \beta$, $M'TS = \varphi$, on a

$$A'A''N = \text{comp.}\,(\beta + \varphi),$$

$$\sin A''NA' = \sin(NA'A'' + A'A''N) = \sin(90° - \varphi) = \cos\varphi.$$

Les triangles A'A''N et NTO fournissent les expressions suivantes :

$$ON = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(R-a),\ NT = \frac{R-a}{\cos\varphi},\ A''N = \frac{\sin\beta}{\cos(\beta+\varphi)}\left(b - r - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(R-a)\right);$$

$$A'A'' = \frac{\cos\varphi}{\cos(\beta+\varphi)}\left(b - r - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(R-a)\right).$$

Par la condition du problème, on doit avoir

$$AA' + A'A'' + A''T = TS;$$

substituant dans cette équation les expressions algébriques des lignes, et faisant attention que $\cos(\beta + \varphi) = \cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi$, on a, après les réductions, l'équation suivante

$$(\cos\varphi - \sin\beta)(b - r) - \cos(\beta + \varphi)(R - r)$$
$$+ (\cos\beta - \sin\varphi)(R - a) = 0 \ldots\ldots\ldots.(A).$$

Dans les applications de cette formule, il ne faut pas oublier qu'on n'est pas le maître de choisir pour β et pour φ des angles à volonté : ces angles ont des limites qui dépendent du rapport entre b et a ; il faut donc prendre pour β et φ des valeurs telles, qu'elles puissent satisfaire aux deux conditions suivantes, savoir, que $r < a$ et $R > \frac{b^2 + a^2 - 2br}{2a - 2r}$.

Supposons, par exemple, qu'ayant $b = 100$ et $a = 10$, on voulût faire β de 40° et φ de 15°, l'équation (A) donnerait

$$R = 410{,}0 + 3{,}770r;$$

or en prenant r plus petit que 10, la valeur qui en résulte pour R se trouve toujours plus petite que $\frac{b^2 + a^2 - 2br}{2a - 2r}$, tandis qu'elle doit être plus grande ; d'où il faut conclure que le problème est impossible avec ces données.

Mais si on veut que β soit de 48° et φ de 9°, l'équation (A)

donne alors

$$R = 604{,}53 + 9{,}379r,$$

et l'on trouve qu'en faisant r plus petit que 2,5, la valeur qui en résulte pour R est plus grande que $\frac{b^2 + a^2 - 2br}{2a - 2r}$, et que par conséquent le problème a plusieurs solutions. Si l'on fait, par exemple, $r = 2$, on trouve $R = 623{,}3$, quantité plus grande que $\frac{b^2 + a^2 - 2br}{2a - 2r}$; on trouve ensuite, en remontant aux expressions des lignes de la figure,

$$A'A'' = 1{,}6, \quad A''T = 619{,}8.$$

La construction de l'anse de panier n'a plus rien de difficile.

M. Bossut a donné dans l'Encyclopédie méthodique, une équation beaucoup plus compliquée que l'équation (A) ci-dessus : elle renferme d'ailleurs une erreur manifeste : l'Auteur y suppose qu'on peut prendre le premier rayon r d'une grandeur arbitraire, tandis que nous avons vu qu'il doit toujours être plus petit que la montée a : il faut en dire autant de la limite R qu'il n'est pas moins indispensable de considérer.

Nous avons déjà dit que, plus le nombre des centres est grand, plus le problème des anses a de solutions : on en diminue le nombre par celui des conditions que l'on s'impose. Le choix de ces conditions est important; en général les plus essentielles sont, 1°. que l'espace renfermé par l'anse ou le volume d'eau soit un *maximum;* 2°. que les changemens de courbure d'un arc à l'autre, soient les plus petits possibles. Voyons comment l'on peut remplir ces deux conditions.

Soit (fig. 51) une demi-anse à cinq centres. Nous avons vu que le second centre A″ peut être pris sur tous les points de l'arc elliptique compris dans l'angle AOT. Maintenant il est aisé de voir que si l'on prend le point A″ plus près de A′, on aura une nouvelle anse de panier qui embrassera la première; ensorte que depuis le point Z jusqu'au point P, les volumes d'eau renfermée par les anses vont en augmentant, et dans ces deux limites, l'anse à cinq centres redevient à trois centres. Il s'ensuit que le premier rayon r et le dernier R restant les mêmes, plus le second rayon est petit, plus l'espace renfermé par la courbe est grand.

Il

Il n'est pas moins aisé de prouver que plus r augmente, plus R augmente aussi, et plus le volume d'eau est considérable.

Donc on approchera d'autant plus du *maximum* du volume d'eau, qu'on fera r et R plus grands et le rayon intermédiaire plus petit.

Voyons actuellement ce qui arrive relativement aux changemens de courbure : b et a restant les mêmes. On peut combiner d'une infinité de manières les trois rayons et l'angle AA'M. Il est évident que la combinaison la plus favorable serait celle pour laquelle les changemens de courbure qui ont lieu en M et M' seraient en même temps les plus petits, ou pour laquelle $\frac{A''M}{AA'}$ et $\frac{TS}{A''M}$ seraient des *minimums*. Ces deux conditions sont incompatibles et ne peuvent avoir lieu ensemble. Pour s'en convaincre, il faut faire varier séparément les indéterminées de la question.

Supposons d'abord les centres A' et T fixes, c'est-à-dire r et R constans : le second centre A'' pourra être pris arbitrairement sur l'arc ellyptique PZ; plus A'' sera près de A', plus le changement de courbure en M sera petit; mais plus aussi il sera grand en M', et *vice versâ*. Cela sera vrai, indépendamment de toutes valeurs de r et R : donc on ne peut pas obtenir en même temps que les changemens de courbure en M et M' soient tous deux des *minimums*.

Il s'ensuit que le centre A' étant fixe, plus on prendra T près de Z, plus $\frac{R}{r}$ sera petit. Mais c'est un théorème facile à démontrer que, quelle que soit la position de T, le point Z d'intersection de la montée avec l'arc elliptique, ne change point de place ou reste le même pour toutes les ellipses. En effet, quand on prend le second centre A'' au point Z, en imaginant la ligne A'Z, on a

$$A'Z + ZT = TS', \quad \text{ou} \quad A'Z = S'Z,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en un seul point Z, et alors l'anse devient à trois centres seulement. Donc plus T sera près de Z, plus $\frac{R}{r}$ sera petit, quelle que soit d'ailleurs la position du centre A''. On diminue donc le changement de courbure en M', lorsque le premier et le second rayon restant de même longueur, on rapproche

T de z; ce qui augmente, en même temps, l'arc AM et diminue l'arc MM'.

Si maintenant on fait varier le centre A', z changera de place. Les valeurs que nous avons déterminées pour r et R dans le problème premier, et qui donnent le *minimum* de $\frac{R}{r}$, auront encore lieu ici, puisqu'on est le maître de prendre le point T aussi près qu'on le veut de z.

La conclusion de ce qui précède est qu'il faut d'abord, dans les anses à cinq centres comme dans celles à trois centres, faire $AA' = r = \frac{b^2 + a^2 - (b-a)\sqrt{b^2+a^2}}{2b}$, et TS ou R un peu plus grand que $\frac{b^2 + a^2 + (b-a)\sqrt{b^2+a^2}}{2a}$: cette combinaison donnera un *minimum* pour $\frac{R}{r}$. Reste à savoir où il convient de placer le second centre A''. Nous avons vu qu'en diminuant le changement de courbure en M, on l'augmente en M', et réciproquement. Ce qu'il y a de plus avantageux à faire, est que les changemens en M et M' soient les mêmes. Pour cela, il faut que $\frac{A''M}{AA'} = \frac{TS}{A''M}$, ou que $\overline{A''M}^2 = \overline{TS}.\overline{AA'}$, ou que $A''M = \sqrt{rR}$, ce qui donne

$$A'A'' = -r + \sqrt{rR} \quad \text{et} \quad TA'' = R - \sqrt{rR}.$$

On aura donc le point A'' en décrivant du point A' avec un rayon $-r + \sqrt{rR}$, et du point T avec un rayon $R - \sqrt{rR}$, deux arcs de cercle dont l'intersection sera au point A''.

En récapitulant ce que nous avons dit dans ce problème, on voit, 1° qu'on approchera d'autant plus du *maximum* du volume d'eau, qu'on fera le premier rayon r et le troisième R plus grands, et le rayon intermédiaire plus petit; 2° que les deux changemens de courbure en M et M' seront d'autant plus petits que les valeurs de r et de R approcheront davantage de celles trouvées dans le problème Ier, en faisant le second rayon moyen proportionnel entre les deux autres.

Comme ces deux bases sont incompatibles, il faudra se rapprocher de l'une ou de l'autre, suivant les circonstances particulières.

Ainsi, si le pont est élevé et qu'on n'ait pas besoin d'augmenter le passage de l'eau, il faudra, comme nous l'avons dit, faire

$$r = \frac{b^2 + a^2 + (b - a)\sqrt{b^2 + a^2}}{2b},$$

R un peu plus grand que $\frac{b^2 + a^2 + (b - a)\sqrt{b^2 + a^2}}{2a}$, et le rayon intermédiaire $= \sqrt{r\mathrm{R}}$: ces proportions fournissent l'anse la plus gracieuse à l'œil.

Si au contraire on a intérêt à augmenter le libre passage de l'eau, il faudra prendre r très-peu au-dessous de a, faire R aussi grand que le permet l'exécution de l'épure, et prendre le second rayon très-petit, ou A″ voisin de P : cette combinaison fournira le plus grand volume d'eau possible.

M. Bossut, dans l'article précité de l'*Encyclopédie*, suppose le premier centre A′ constant, ainsi que l'angle AA′M, et il cherche sur la ligne MA″ indéfinie, et sur la montée prolongée, les centres A″ et T qui fournissent un *minimum* pour $\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{MA''}}$, ou qui donnent le plus petit changement de courbure en M′. Cette hypothèse ne mène à rien, puisque nous avons vu qu'en diminuant le changement de courbure en M′, on l'augmente en M, et que par conséquent on perd d'un côté l'avantage acquis de l'autre; d'ailleurs l'Auteur ne fait varier que deux inconnues au lieu de quatre, et en faisant varier l'angle AA′M, il aurait vu qu'on est conduit à placer A″ et T le plus près possible de z : on a alors le *minimum* de tous les *maxima* qu'il a cherchés. Il faut donc regarder comme insignifiante l'hypothèse qu'il a considérée.

PROBLÈME IV.

Des anses à un nombre quelconque de centres.

Quel que soit le nombre des centres, les résultats suivans auront toujours lieu.

1°. On ne peut déterminer la variation ou le changement de

courbure dans l'un des points M, M', M'', M''',....etc. (fig. 50), sans l'augmenter dans les autres; d'où il suit qu'il n'y a aucun avantage dans les combinaisons de ce genre.

2°. Les centres A' et T restant à la même place, et les autres rayons restant aussi les mêmes, on augmente le volume d'eau en rapprochant les points M, M', M'', etc. du point A.

3°. Le point T étant fixe, l'anse à deux centres renfermera plus d'eau que toute autre; car on ne pourrait ajouter un centre de plus A'' à la figure 46, sans rapprocher A' vers A, et la nouvelle courbe serait renfermée dans la première; d'où il suit que l'anse de la figure 48 est celle qui renferme le plus grand espace à bases et montées égales.

Il suit de ce qui précède, qu'en multipliant les centres, on diminue le volume d'eau, ainsi que le changement de courbure, et qu'ainsi en se rapprochant d'une espèce de perfection, on s'éloigne de l'autre. On se décidera donc suivant les circonstances, pour la préférence à donner à l'une ou à l'autre. Ainsi, si l'on a un grand intérêt à augmenter le volume de l'eau, on choisira une anse à trois centres: si au contraire on n'a pas besoin d'augmenter l'espace renfermé par l'anse, on préférera l'anse à un grand nombre de centres, afin de diminuer la variation de courbure d'un arc à l'autre.

Dans le premier cas, on fera le premier rayon r presqu'égal à la montée a, ce qui rendra l'autre R très-grand; il n'y a de borne à cette règle que celle qu'exige l'exécution de l'épure.

Dans le second cas, il faudra insérer entre r et R d'autres rayons intermédiaires r', r'', r''', etc. qui devront être des moyens géométriques : r étant un peu plus petit que a, et R un peu plus grand que $\frac{b^2+a^2-2br}{2a-2r}$. Les expressions de tous les rayons, en appelant n le nombre des centres de la demi-anse ou des rayons, seront

$$AA'=r,\quad A''M=r\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{n-1}}=r',\quad A'''M'=r\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2}{n-1}}=r'',$$

$$A^{IV}M''=r\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{3}{n-1}}=r''' \ldots\ldots TS=R.$$

Ayant les grandeurs des rayons, on aura les côtés du polygone par des soustractions successives. Il restera ensuite à marquer les centres A'', A''', A^{iv}, etc., ce qui peut se faire de bien des manières.

Imaginons que les côtés $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{iv}$, $A^{iv}A^{v}$, $A^{v}T$ de grandeurs invariables, soient liés ensemble par des charnières en A'', A''', A^{iv}, A^{v}, on voit que les cinq côtés de ce polygone, dont les extrémités sont fixées en A' et T, peuvent prendre une infinité de positions. Toutes celles de ces positions dans lesquelles le polygone aura *tous* ses angles saillans et compris dans l'angle $A'OT$, fourniront des anses de panier. Chaque centre A'', A''', A^{iv}, A^{v} pourra varier entre deux limites $r''v''$, $r'''v'''$, $r^{iv}v^{iv}$, $r^{v}v^{v}$. On peut déterminer ces limites soit par la trigonométrie, soit par une construction graphique.

On peut y parvenir encore plus simplement, en formant le polygone $A'A''A'''A^{iv}A^{v}T$ avec des bandes de carton liées ensemble en $A''A'''A^{iv}A^{v}$ par des charnières de papier. Alors si l'on a intérêt d'augmenter le volume d'eau, on donnera au polygone une position qui rapprochera les centres A'', A''' de la ligne AO, position qui diminuera la longueur des premiers arcs AM, MM', et augmentera la longueur des arcs SM^{iv}, $M^{iv}M^{v}$ dont les rayons sont les plus longs.

Si au contraire on n'a pas besoin d'augmenter le volume de l'eau, on donnera au polygone une position telle, que ses angles saillans A'', A''', A^{iv}, A^{v} ne soient pas trop inégaux Le goût suffira pour choisir la combinaison la plus gracieuse à l'œil. En général il paraît plus convenable que les arcs AM, MM', etc. ou croissent tous ou diminuent tous.

PROBLÈME V.

Faire une anse de panier d'un nombre quelconque de centres, dont les arcs soient d'un nombre de degrés déterminé, et dont les changemens de courbure soient égaux.

Dans le problème précédent, les angles formés par les rayons étaient arbitraires; ici nous les supposerons donnés ou liés par une loi.

Soit r le premier rayon AA', et R le dernier TS : la raison de la progression sera $\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, n étant le nombre des rayons ; et en faisant pour abréger $\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{n-1}} = q$, les rayons successifs seront r, qr, q^2r, q^3r, q^4r........R ; je supposerai que la voûte a onze centres, ou la demi-voûte six, comme dans la figure 53 : ce que nous dirons s'appliquera aisément à un plus grand nombre de centres.

Soient ${}^{v}\beta$, ${}^{iv}\beta$, ${}'''\beta$, ${}''\beta$, ${}'\beta$, β, ... les nombres de degrés que doivent avoir les arcs AM, MM', M'M'', M''M''', M'''M^{iv}... M^{iv}S : en construisant sur les côtés du polygone les triangles rectangles A'A''R', A''A'''R'', A'''A^{iv}R''', A^{iv}A^{v}R^{iv}, A^{v}TR^{v}, on aura cette suite d'équations

$$\begin{array}{l|l}
A'A'' = x\,(q-1) & TR^{v} = TA^{v}\cos\beta, \\
A''A''' = qx\,(q-1) & A^{v}R^{iv} = A^{iv}A^{v}\cos(\beta+{}'\beta), \\
A'''A^{iv} = q^2x\,(q-1) & A^{iv}R''' = A'''A^{iv}\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta), \\
A^{iv}A^{v} = q^3x\,(q-1) & A'''R'' = A''A'''\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta), \\
A^{v}T = q^4x\,(q-1) & A''R' = A'A''\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta+{}^{iv}\beta).
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
A^{v}R^{v} &= TA^{v}\sin\beta, \\
A^{iv}R^{iv} &= A^{iv}A^{v}\sin(\beta+{}'\beta), \\
A'''R''' &= A'''A^{iv}\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta), \\
A''R'' &= A''A'''\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta), \\
A'R' &= A'A''\sin(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta+{}^{iv}\beta).
\end{aligned}$$

Or il est évident qu'on doit avoir ces deux équations

$$TR^{v} + A^{v}R^{iv} + A^{iv}R''' + A'''R'' + A''R' = TO = R - a = q^5r - a \ldots (1),$$
$$A^{v}R^{v} + A^{iv}R^{iv} + A'''R''' + A''R'' + A'R' = A'O = b - r \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Substituant dans les équations (1) et (2), au lieu des lignes leurs expressions algébriques, ainsi que celles des rayons, elles deviennent

$$\left.\begin{aligned}
&(q-1)q^4r\cos\beta + (q-1)q^3r\cos(\beta+{}'\beta) + (q-1)q^2r\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta) \\
&+ (q-1)qr\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta) + (q-1)r\cos(\beta+{}'\beta+{}''\beta+{}'''\beta+{}^{iv}\beta) \\
&= q^5r - a\,;
\end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}(q-1)q^4r\sin\mathcal{C}+(q-1)q^3r\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C})+(q-1)q^2r\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C})\\ +(q-1)qr\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C}+'''\mathcal{C})+(q-1)r\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C}+'''\mathcal{C}+''''\mathcal{C})\\ =b-r.\end{array}\right\}\ (4)$$

Je multiplie l'équation (3) par $\frac{b}{r}$, et l'équation (4) par $\frac{a}{r}$, et les ayant ajoutées, j'ai la suivante, qui ne renferme plus r :

$$\left.\begin{array}{l}b(q-1)\,[q^4\cos\mathcal{C}+q^3\cos(\mathcal{C}+'\mathcal{C})+q^2\cos(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C})\\ +q\cos(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C}+'''\mathcal{C})+\cos(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C}+'''\mathcal{C}+''''\mathcal{C})]\\ -bq^5+a(q-1)[q^4\sin\mathcal{C}+q^3\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C})+q^2\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C})\\ +q^2\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C})+q\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C}+'''\mathcal{C})\\ +\sin(\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C}+'''\mathcal{C}+''''\mathcal{C})]+a=0.\end{array}\right\}\ldots\ (5)$$

Quand on connaîtra les angles $\mathcal{C}$, $'\mathcal{C}$, $''\mathcal{C}$, etc., on pourra toujours déterminer q par l'équation (5), ensuite r par l'une des équations (3) et (4), et R par l'équation $R=q^5r$.

Si les angles $\mathcal{C}$, $'\mathcal{C}$, $''\mathcal{C}$, etc. doivent être des fonctions de q^2, le problème serait d'un ordre plus élevé, et l'on ne pourrait avoir q que par tâtonnement.

Supposons, par exemple, que les arcs AM, MM', etc. doivent être d'égales longueurs, à l'exception de celui M''S de la clef, qui, étant répété deux fois de part et d'autre de la montée, ne doit être que la moitié des autres ; on voit que cette condition exige que le nombre des arcs, c'est-à-dire $\mathcal{C}'$, $''''\mathcal{C}$, $'''\mathcal{C}$, etc. soient en progression géométrique décroissante, dont la raison soit q. On aura donc

$$'\mathcal{C}=2\mathcal{C}q;\quad ''\mathcal{C}=2\mathcal{C}q^2;\quad '''\mathcal{C}=2\mathcal{C}q^3;\quad ''''\mathcal{C}=2\mathcal{C}q^4,\quad '\mathcal{C}=2\mathcal{C}q^5:$$

mais on doit aussi avoir $\mathcal{C}+'\mathcal{C}+''\mathcal{C}+'''\mathcal{C}+''''\mathcal{C}+'\mathcal{C}=90°$.

Substituant dans cette dernière équation pour $'\mathcal{C}$, $''\mathcal{C}$, $'''\mathcal{C}$, $''''\mathcal{C}$, $'\mathcal{C}$; leurs valeurs en $\mathcal{C}$, et tirant ensuite la valeur de $\mathcal{C}$, on a

$$\mathcal{C}=\frac{90°}{2q^5+2q^4+2q^3+2q^2+2q+1}.$$

On trouvera ensuite les valeurs de $'\mathcal{C}$, $''\mathcal{C}$, $'''\mathcal{C}$, ... etc., en multipliant successivement celle de $\mathcal{C}$ par $2q$, $2q^2$, $2q^3$, etc., et l'équation (5) ne renfermera plus que b, a, q. Il ne sera pas possible

d'avoir q directement, mais on pourra y parvenir par des essais ou des substitutions.

En donnant successivement à q différentes valeurs, telles que 1,1, 1,2, 1,3, 1,4, ..., etc., on formerait entre b, a, r, et les autres rayons qr, q^2r, q^3r, ..., et les angles β, ${}'\beta$, ${}''\beta$, etc., une table au moyen de laquelle on pourrait toujours construire l'anse de panier dont on connaît b et a. Pour l'exactitude de la construction, il faudrait calculer trigonométriquement, à l'égard de AO et de OT, le lieu des centres A", A", A'', A', et les points d'intersection de la ligne AO avec les différens rayons.

Voici les calculs qui ont servi à construire la figure 53 : j'ai fait $a = 1$, $q = 1,5$, et j'ai trouvé

$\beta = 2° 12'$	AA' = 0,6978	A'R' = 0,1936	A'R' = 0,2903,
$'\beta = 6° 40'$	A'A" = 0,3489	A"R" = 0,4348	A"R' = 0,2914,
$''\beta = 9° 59'$	A"A" = 0,5234	A''R" = 0,7427	A"R" = 0,2513,
$''\beta = 14° 59'$	A"A'' = 0,7849	A'R'' = 1,1635	A''R'' = 0,1818,
$''\beta = 22° 27'$	A''A' = 1,1775	TR' = 1,7653	A'R' = 0,0683,
$'\beta = 42° 42'$	A'T = 1,7666		
$b = 1,784$			

Il est aisé de donner une forme générale à l'équation (5), et de la rendre applicable à un nombre quelconque n de centres ou de rayons d'une demi-anse, et l'on a

$$\left.\begin{array}{l} b(q-1)[\cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta + \ldots + {}^{n-2}\beta) \\ +q\cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta + \ldots + {}^{n-3}\beta) + q^2\cos(\beta + {}'\beta + {}''\beta + \ldots + {}^{n-4}\beta) + \ldots] \\ -bq^{n-1} + a(q-1)[\sin(\beta + {}'\beta + {}''\beta \ldots + {}^{n-2}\beta) \\ +q\sin(\beta + {}'\beta + {}''\beta + \ldots + {}^{n-3}\beta) + q^2\sin(\beta + {}'\beta + {}''\beta + \ldots + {}^{n-4}\beta) + \ldots] \\ +a = 0. \end{array}\right\} (6)$$

Il faut observer que dans cette formule les expressions ${}^{n-2}\beta$, ${}^{n-3}\beta$, ${}^{n-4}\beta$, n'indiquant pas des puissances de β : $n-2$, $n-3$, etc., indiquent seulement le nombre d'accens des angles successifs ; ensorte que quand on a $n - \beta$, par exemple, égal à zéro, $\cos{}^{n-5}\beta$ devient $\cos\beta$, et la série est terminée. On peut remarquer que pour deux rayons on a un terme seulement entre les deux crochets,

deux

deux termes pour trois rayons, trois termes pour quatre rayons, et ainsi de suite.

PROBLÈME VI.

Trouver la ligne de courbure uniformément croissante.

Imaginons que d'après la solution du problème précédent, on ait fait une anse de panier à mille, un million, etc. de centres. On passera d'un arc à l'autre par des degrés égaux de courbure. Maintenant, si on suppose que le nombre des centres ou des arcs soit infini, la suite de tous ces petits arcs égaux formera une courbe continue qui aura cette propriété, que les changemens de courbure s'y feront par degrés uniformes : c'est l'équation de cette courbe que je me propose de trouver. Nous verrons ensuite l'utilité dont elle peut être dans la construction des anses de panier.

Soit AS la courbe cherchée (fig. 54), $AP = x$, $PM = y$; puisqu'en divisant l'arc $AM = s$, en parties égales et infiniment petites, les rayons de courbure correspondans doivent être en progression géométrique, il s'ensuit que l'arc s doit être le logarithme du rayon de courbure en M. Ainsi la courbe cherchée est une espèce de logarithmique dans laquelle les arcs sont les logarithmes des rayons osculateurs; par conséquent, si on développait l'arc AM en ligne droite, et qu'on fît passer une courbe par les extrémités de tous ces rayons osculateurs qui deviendraient parallèles entre eux, cette courbe serait la logarithmique ordinaire. Par la même raison, si l'on ployait l'axe de la logarithmique ordinaire jusqu'à ce que les ordonnées vinssent à se toucher, cet axe ainsi ployé formerait la courbe que nous cherchons.

Cela posé, en appelant c le rayon de courbure AA′ de la courbe au point A, et φ celui du point M, l'équation de la courbe sera $s = \log\frac{\varphi}{c}$, ou (en appelant e le nombre 2,71825, dont le logarithme hyperbolique est 1) $ce^s = \varphi$.

Mettant dans cette équation pour φ son expression, qui est, dans le cas de ds constant, $\frac{dxds}{-d^2y}$, ou $\frac{ds\sqrt{ds^2-dy^2}}{-d^2y}$; on a

$$d^2y = -\frac{ds\sqrt{ds^2-dy^2}}{ce^s},$$

20

Pour intégrer cette équation, je fais $dy = pds$, ce qui donne $d^2y = dpds$; et substituant, on a

$$\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = -\frac{ds}{ce^2},$$

dont l'intégrale est $c' + \text{arc}\sin p = \frac{1}{ce^2}$, ou $p = \sin\left(\frac{1}{ce^2} - c'\right)$, ($c'$ étant la constante qu'il faut ajouter après l'intégration).

Pour intégrer de nouveau, je remets pour p sa valeur $\frac{dy}{ds}$, ce qui donne $dy = ds \sin\left(\frac{1}{ce^2} - c'\right)$. Je fais $\frac{1}{ce^2} = u$, et après les substitutions, j'ai la transformée

$$dy = -\frac{du}{u}\sin(u - c') = -\frac{du}{u}\sin u.\cos c' + \frac{du}{u}\cos u.\sin c' \ldots (1)$$

Pour intégrer cette dernière équation, j'y substitue pour $\sin u$ et $\cos u$, leurs valeurs données par les séries suivantes, qui sont très-connues,

$$\sin u = u - \frac{u^3}{2.3} + \frac{u^5}{2.3.4.5} - \frac{u^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$
$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{2.3.4} - \frac{u^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc.};$$

et après avoir intégré, j'ai l'équation suivante, dans laquelle c'' est la constante ajoutée,

$$\left.\begin{array}{l} y = -\cos c'\left(u - \frac{u^3}{2.3^2} + \frac{u^5}{2.3.4.5^2} + \text{etc.}\right) \\ \quad + \sin c'\left(\log u - \frac{u^2}{2^2} + \frac{u^4}{2.3.4^2} - \text{etc.}\right) + c'' \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)$$

Si dans l'équation $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$, on substitue pour dy, sa valeur tirée de l'équation (1), on a

$$dx = -\frac{du}{u}\cos(u - c') = -\frac{du.\cos u.\cos c'}{u} - \frac{du.\sin u.\sin c'}{u},$$

qui s'intègre comme l'équation (1), et donne

$$\left.\begin{array}{l} x = -\cos c'\left(\log u - \frac{u^2}{2^2} + \frac{u^4}{2.3.4^2} - \text{etc.}\right) \\ \quad - \sin c'\left(u - \frac{u^3}{2.3^2} + \frac{u^5}{2.3.4.5^2} - \text{etc.}\right) + c'' \end{array}\right\} \ldots (3)$$

Pour déterminer les constantes c, c', c'', c''', il faut faire les remarques suivantes. La courbe doit remplir quatre conditions : 1°. elle doit être perpendiculaire sur l'axe en A ; 2°. On doit avoir en ce point $x=0$, $y=0$, $s=0$. 3°. La tangente de la courbe doit être perpendiculaire en S sur SO ; 4°. On doit avoir au point S, $x=b$, $y=a$. Pour remplir ces quatre conditions, il nous manque une constante arbitraire, car si on éliminait u des équations (2) et (3), l'équation en x et y ne renfermerait que trois constantes : cela vient de ce que l'équation $\varphi=ce^s$, que nous avons posée pour celle de la logarithmique, n'est pas assez générale : il eût fallu prendre $ds=\frac{kd\varphi}{\varphi}$, équation dans laquelle k est constant, et qui exprime en général la relation d'une progression arithmétique quelconque à une progression géométrique quelconque. Les trois intégrations successives auraient introduit trois nouvelles constantes : je n'ai pas suivi cette marche, qui aurait exigé qu'on eût l'équation finie en x et y.

On remplit également ce but, en substituant aux conditions (3) et (4), celle-ci : savoir, que $s=g$ dans le point S, ou bien cette autre, que dans le point S on ait $\frac{y}{x}=\frac{a}{b}=k$, ($k$ étant un rapport numérique).

Pour remplir la première condition, je fais $dy=ds$, et $s=0$ dans l'équation $dy=ds\sin\left(\frac{1}{ce^s}-c'\right)$, et elle devient

$$1=\sin\left(\frac{1}{c}-c'\right);$$

ou en appelant m l'arc de 90°, dans le cercle dont le rayon est 1, c'est-à-dire faisant $1{,}5708=m$, on a

$$m=\frac{1}{c}-c' \quad \text{ou} \quad c'=\frac{1}{c}-m \ldots\ldots (4).$$

Pour remplir la seconde condition, je fais $y=0$, $x=0$ et $s=0$, ou $u=\frac{1}{c}$ dans les équations (2) et (3), et elles donnent

$$c' = \cos c' \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2.\overline{3}^2.c^3} + \frac{1}{2.3.4.\overline{5}^2.c^5} - \text{etc.}\right)$$

$$- \sin c' \left(- \log c - \frac{1}{\overline{2}^2\, c^2} + \frac{1}{2.3.\overline{4}^2.c^4} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots (5).$$

$$c'' = \cos c' \left(- \log c - \frac{1}{\overline{2}^2\, c^2} + \frac{1}{2.3.\overline{4}^2.c^4} - \text{etc.}\right)$$

$$+ \sin c' \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2\,.\,\overline{3}^2.c^3} + \frac{1}{2.3.4.\overline{5}^2.c^5} - \text{etc.}\right) \ldots\ldots\ldots (6).$$

Pour remplir la condition que $s = g$ à la clef S, je fais $s = g$ et $\frac{dy}{ds} = 0$ dans l'équation $dy = ds.\sin\left(\frac{1}{ce^s} - c\right)$, et elle devient

$$c' = \sin\left(\frac{1}{ce^g} - c'\right);$$

or l'arc dont le sinus est zéro est lui-même zéro; donc

$$\frac{1}{ce^g} - c' = 0 \quad \text{ou} \quad c' = \frac{1}{ce^g} \ldots\ldots (7);$$

combinant cette équation avec l'équation (4), on en tire

$$c = \frac{1}{m} - \frac{1}{me^g} \ldots\ldots (8).$$

Ainsi les quatre constantes seront données en fonction de g, et les équations (2) et (3) ne renfermeront plus que g et les variables x, y et u ou s.

Si pour troisième condition on veut que les coordonnées de la clef soient dans le rapport de $\frac{a}{b}$, ou qu'on ait $\frac{y}{x} = \frac{a}{b} = k$, on remarquera que l'équation (7) donne pour le point S, $c' = u$. Je fais donc dans les équations (2) et (3), $x = b$, $y = bk$, $u = c'$, et éliminant b, on aura l'équation suivante qui, après y avoir mis pour c' sa valeur en c, ne renfermera plus que c et k, et de laquelle par conséquent on pourra tirer la valeur de c en fonction de k,

$$(k \sin c' - \cos c')\left(c' - \frac{c'^3}{2.\overline{3}^2} + \frac{c'^5}{2.3.4.\overline{5}^2} - \text{etc.}\right)$$

$$+ (\sin c' + k \cos c')\left(\log c' - \frac{c'^2}{\overline{2}^2} + \frac{c'^4}{2.3.\overline{4}^2} - \text{etc.}\right)$$

$$+ (\cos c' - k \sin c')\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2.\overline{3}^2.c^3} + \frac{1}{2.3.4.\overline{5}^2.c^5} - \text{etc.}\right)$$

$$- (\sin c' + k \cos c')\left(-\log c - \frac{1}{\overline{2}^2.c^2} + \frac{1}{2.3.\overline{4}^2.c^4} - \text{etc.}\right) = 0 \ldots (9).$$

Les équations (4), (5), (6) donneront ensuite les valeurs de c', c'', c''' en fonctions de k.

D'après ce que nous avons dit dans le commencement de ce problème, on voit que si $A't$ est une logarithmique ordinaire dont As est l'axe, et qu'on ploie l'axe As jusqu'à ce que les ordonnées ma''.....st de la logarithmique se touchent de deux en deux, l'axe As deviendra la courbe cherchée AS; les ordonnées de la logarithmique deviendront les rayons osculateurs de la nouvelle courbe : les extrémités a'', a''', a^{IV}.....t des ordonnées de la logarithmique tomberont sur les points $A''A'''A^{\text{IV}}$.......T de la courbe A'T, qui sera la développée de la courbe AS. Les points m, m', m''.....etc. tomberont sur M, M', M''....etc. La courbe AS sera, comme nous le verrons, une espèce de logarithmique spirale.

Si l'on ployait circulairement et du côté opposé l'axe As, jusqu'à ce que les ordonnées prolongées concourussent au centre du cercle dont cet axe serait la circonférence, la courbe passant par les extrémités des ordonnées serait la logarithmique spirale de Bernoulli.

On pourrait croire que puisque $st = \text{ST}$, on doit aussi avoir $A't = \text{A'T}$; mais cela n'est pas : et effet, on a

$$\text{A'T} = \text{TS} - \text{AA'} = st - \text{AA'}:$$

or, $A't$ est nécessairement plus grand que $st - \text{AA'}$: donc aussi $A't > \text{A'T}$.

Si l'on suppose $g = \text{AS} = 2$, on trouve

$$c = 0{,}55045, \quad c' = 0{,}24587, \quad c'' = 2{,}0085,$$
$$c''' = -1{,}7805, \quad \text{AO} = 1{,}5659, \quad \text{OS} = 0{,}9163,$$

et l'on forme le tableau suivant pour la construction des courbes AS et A'T.

AM ou s.	PM ou y.	AP ou x.	MA' ou R.	PR ou sounormale.
0,0	0,0000	0,0000	0,5504	0,5504
0,2	0,1962	0,0337	0,6723	0,5741
0,4	0,3442	0,1237	0,8212	0,5782
0,6	0,5251	0,2544	1,0030	0,4902
0,8	0,6472	0,4125	1,2250	0,4152
1,0	0,7421	0,5884	1,4963	0,3335
1,2	0,8124	0,7755	2,8276	0,2525
1,4	0,8619	0,9693	2,2322	0,1767
1,6	0,8937	1,1671	2,7264	0,1087
1,8	0,9111	1,3659	3,3300	0,0496
2,0	0,9163	1,5656	4,0672	0,0000

En imitant la marche indiquée par ce tableau, et en calculant, pour plus d'exactitude, vingt points de la courbe au lieu de dix, on aurait les quarante-un centres d'une anse de panier qui serait à la fois très-régulière et très-agréable à l'œil : elle aurait l'avantage de laisser passer plus d'eau que l'ellipse et d'avoir les voussoirs égaux, tandis que l'augmentation de courbure, à partir de la clef, se ferait par des degrés égaux. On pourrait construire une table qui donnerait les cinq élémens de celle ci-dessus, pour tous les rapports entre la montée et l'ouverture, c'est-à-dire depuis $k = 0,1$ jusqu'à $k = 0,9$. Je pense que ce travail serait fort utile aux Architectes, et en particulier aux Ingénieurs des ponts et chaussées.

Si l'on calcule les valeurs de x et y correspondantes aux valeurs négatives de s, afin de continuer la courbe AS en dessous de l'axe

du côté de A, on trouve que la courbe fait des révolutions autour d'un certain point I (fig. 55) où elle n'arrive que lorsque $s = -\infty$.

Les équations (2) et (3) peuvent bien servir à calculer quelques-unes de ces spires ; mais il sera plus court d'employer la méthode des quadratures ou celle qui se déduit du théorème de Taylor. On trouvera

$$AR = 0{,}428 \quad \text{et} \quad RI = 0{,}165.$$

Cette espèce de spirale logarithmique peut être le type de toutes les anses de panier possibles. On conçoit qu'il suffit de trouver sur la courbe deux points tels, que les normales AO et SO soient entre elles dans le rapport donné de la demi-ouverture à la montée.

On trouve que la développée de la courbe AS est une autre spirale ayant le même centre I que la première, et dont l'équation est de même forme.

Courbe dont les rayons osculateurs sont proportionnels aux arcs.

Dans la courbe qui a fait l'objet de ce problème, les rayons osculateurs étaient en progression géométrique, les arcs étant en progression arithmétique. On pourrait demander quelle est la courbe dans laquelle les rayons osculateurs sont en progression arithmétique. Voici comment on pourrait concevoir la génération.

Il faut imaginer que (fig. 54) $A't$, au lieu d'être une logarithmique, est une ligne droite, et qu'on fasse ployer l'axe As jusqu'à ce que les ordonnées ma'', $m'a''$, etc. se touchent de deux en deux : cet axe As deviendra la courbe cherchée AS. L'équation de la droite A'T rapportée à l'axe As sera

$$\varphi = cs + c' \quad \text{ou} \quad cs + c' = -\frac{dx.ds}{d^2y}.$$

En intégrant de la même manière que précédemment, on aura les deux équations

$$dy = ds \sin\left(\log \frac{c''}{(cs+c')^{\frac{1}{c}}}\right), \quad dx = ds \cos\left(\log \frac{c''}{(cs+c')^{\frac{1}{c}}}\right),$$

qui donnent pour la courbe cherchée une nouvelle spirale. Je ne

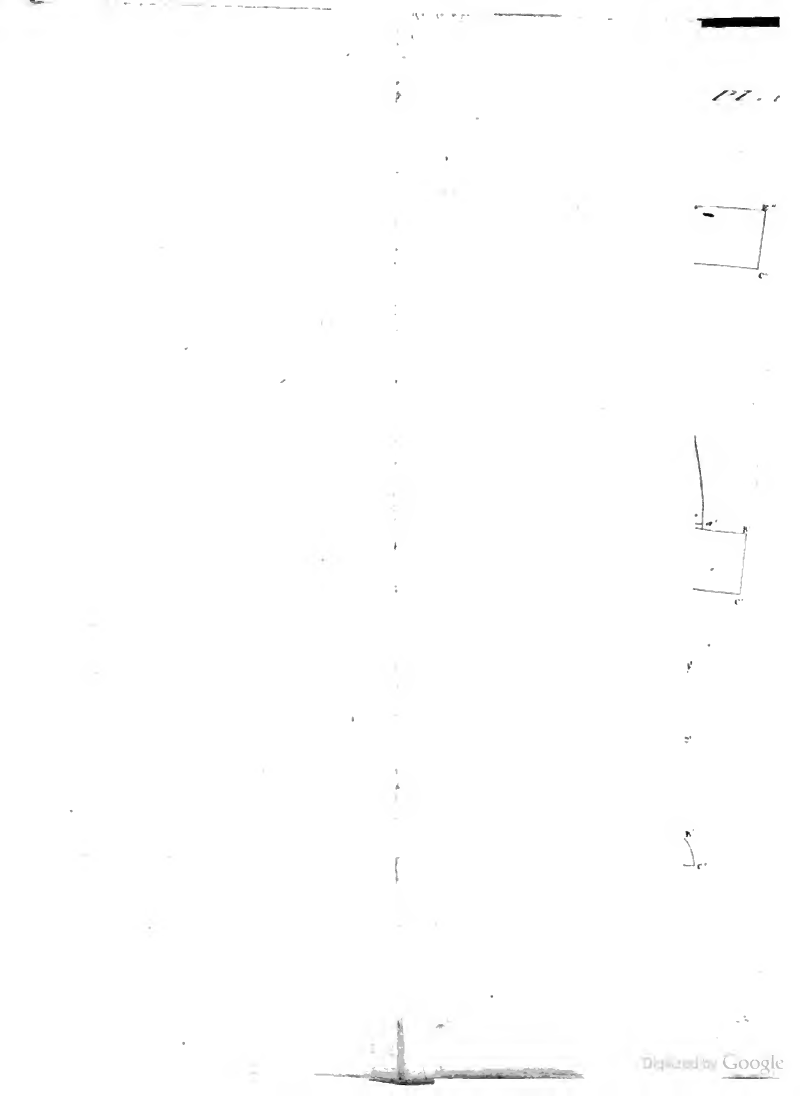
m'arrête pas à discuter cette dernière courbe, parce que la première est préférable. Je remarquerai seulement que lorsque la ligne droite $A't$ est parallèle à l'axe As, la courbe AS devient une circonférence de cercle.

PROBLÈME VII.

Sur l'équilibre et la poussée des anses de panier.

Tout ce que nous avons dit dans le cours de cet Ouvrage sur l'équilibre et la poussée des voûtes, a encore lieu lorsque l'intrados, au lieu d'être une courbe continue dont tous les points sont liés par une même loi ou équation, est une anse de panier, c'est-à-dire une réunion d'arcs de différens cercles. On peut toujours, au moyen de l'équation $M \cot \alpha = 0$, trouver l'extrados qui rend la voûte équilibrée. Quant à la poussée, il est évident qu'elle se calculera aussi par les méthodes que j'ai exposées. Il serait sans doute superflu de donner des exemples qui d'ailleurs étendraient trop les bornes de cet Ouvrage. Je remarquerai seulement que lorsque la voûte doit être un pont, on ne doit pas adopter pour intrados une courbe pour laquelle l'extrados exigé par l'équilibre s'écarterait trop de la ligne droite. Dans ce calcul, il faut tenir compte de la nature des matériaux compris entre l'intrados et l'extrados, et il peut arriver dans certains cas que la courbe du problème VI ne comportant pas un extrados sensiblement rectiligne, ne puisse pas être employée pour intrados.

FIN.






OF
MICH.

MÉTHODES NOUVELLES

POUR DÉTERMINER LES RACINES

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

ET

LES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES OU DOUBLES.

MÉTHODES NOUVELLES

POUR DÉTERMINER LES RACINES

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

ET

LES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES OU DOUBLES,

AVEC LE RAPPORT APPROBATIF

Fait à l'Académie des Sciences sur la 2.me partie;

Par M. BÉRARD, professeur de mathématiques, membre de plusieurs Sociétés savantes.

A NISMES,

De l'Imprimerie des *ANNALES DE MATHÉMATIQUES*,
Chez DURAND-BELLE.

1818.

AVERTISSEMENT.

Les progrès de l'analise et, par suite, des sciences exactes, tiennent, comme on sait, à trois difficultés principales qui doivent réunir les efforts des géomètres; savoir : l'élimination, la résolution des équations et l'intégration.

On n'a rien ajoûté d'essentiel, que je sache, aux travaux de *Bezout*, sur l'élimination, et il ne s'en agira pas dans cet ouvrage.

La résolution des équations se subdivise en celle des équations littérales et celle des équations numériques. Les promesses, si souvent faites à l'égard des premières, se sont toujours évanouies. A l'égard des secondes, beaucoup de géomètres ont donné des méthodes : on en trouvera l'histoire dans le Chapitre I ci-après : aucune ne réunit assez les conditions d'une bonne méthode, simplicité, brièveté, sureté, exactitude, pour mériter de devenir usuelle.

Le champ est donc encore ouvert sur cet objet : je propose une nouvelle méthode analitique dans le Chapitre III, et plusieurs graphiques dans les Chapitres IV, et V : c'est aux géomètres qu'il appartient de les juger.

Dans le Chapitre VI, j'expose un théorème nouveau qui fournit une règle fort simple pour assigner le nombre

des racines imaginaires d'une équation proposée quelconque : MM. *Lagrange* et *Cauchy* avaient donné de ce problème, des solutions à peu près impraticables pour les degrés un peu élevés : mon théorème est, si je ne me trompe, un pas de plus en algèbre : j'en ai déduit, dans le Chapitre VII, une seconde règle pour distinguer, parmi les racines réelles, les nombres respectifs des positives et des négatives, problème qui est lié au précédent.

Quant au troisième problème dont j'ai parlé, celui de l'intégration, il se subdivise aussi en deux, celui qui concerne les fonctions différentielles d'une seule variable, et celui qui est relatif aux équations différentielles : il ne s'agit point ici du dernier.

En janvier 1817, j'avais présenté à l'académie des sciences une méthode nouvelle pour intégrer par approximation, entre des limites données, les fonctions d'une seule variable : cette compagnie illustre ayant jugé cette méthode préférable à toutes celles connues, et en ayant voté la publicité, je l'ai exposée dans le Chapitre VIII.

Le Chapitre IX est une extension nouvelle de ma méthode à la cubature des solides, et à la quadrature de leur surface : cette extension s'applique à toutes les intégrales appelées doubles, triples, et complète ce sujet.

Enfin, dans le Chapitre X, je donne une théorie nouvelle et plus rigoureuse du tonneau considéré comme composé de douves élastiques : ce sujet offre plusieurs problèmes à la fois piquans pour le géomètre, et utiles à la pratique de l'art.

TABLE SOMMAIRE.

CHAPITRE PREMIER.

Notice historique des travaux faits pour découvrir les racines des équations.

CHAPITRE II.

Notions préliminaires.

CHAPITRE III.

Méthode nouvelle pour déterminer les racines réelles incommensurables.

CHAPITRE IV.

Méthodes analitiques et graphiques, particulières aux 3.me, 4.me *et* 5.me *degrés.*

CHAPITRE V.

Méthodes mécaniques pour trouver les racines.

CHAPITRE VI.

Détermination du nombre des racines imaginaires, d'une équation d'un degré quelconque.

CHAPITRE VII.

Distinction des racines réelles en positives et négatives.

CHAPITRE VIII.

Méthode nouvelle pour quarrer les courbes.

CHAPITRE IX.

Cubature des solides et quadrature de leur surface.

CHAPITRE X.

Du tonneau élastique ou théorie nouvelle et plus rigoureuse du jaugeage.

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

PAGE 29, ligne 13, au lieu de $\sqrt{\frac{1}{3}q^2+\frac{1}{27}p^3}]$, *lisez* : $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}]$.
Page 30, ligne 10, au lieu de $x'=\mp\frac{1}{3}\sqrt{p}]$, *lisez* : $x'=\mp\frac{1}{3}\sqrt{p}]$.
Page 32, ligne 20, au lieu de $x+lz$, *lisez* : $x=lz$.
Page 40, ligne 18, au lieu de $\frac{1}{3}\sqrt[2]{q}]$, *lisez* : $\frac{1}{3}\sqrt[3]{q}]$.
Page 41, ligne 1, au lieu de $-\sqrt{\frac{-p}{3}}$, *lisez* : $-\sqrt{\frac{-p}{2}}$.
Page 42, ligne 14, au lieu de $C=-\frac{r^2}{2q\sqrt{\pm p}]}$, *lisez* : $C=-\frac{r}{2q\sqrt{\pm p}}$.
Page 49, ligne 26, au lieu de $+x$ et $-x$, *lisez* : $+x$ en $-x$.
Page 59, ligne 15, au lieu de $+(\ldots\ldots)x25(\ldots\ldots)$, *lisez* : $+(\ldots\ldots)x+25(\ldots\ldots)$.
Page 60, ligne 6, au lieu de $+El$, *lisez* : $-El$.
ligne 13, au lieu de $+(\ldots\ldots)+x36(\ldots\ldots$, *lisez* : $+(\ldots\ldots)x+36(\ldots\ldots$
ligne 16, au lieu de $+(216f216y\ldots\ldots)$, *lisez* : $+(216f-216y\ldots\ldots)$.
Page 70, ligne dernière, au lieu de | 4 | 6 | 0 | 0 | |, *lisez* : | 4 | 6 | 2 | 0 | |.
Page 73, ligne 1, au lieu de $-128b^3d(z\ldots\ldots$, *lisez* : $-128b^3d)z\ldots\ldots$
ligne 1, au lieu de $+a^3c^2(\ldots\ldots$, *lisez* : $+2a^3c^2(\ldots\ldots$
ligne 16, au lieu de $+x_3+y_3$, *lisez* : $+x_3-y_3$.
Page 81, ligne 10, au lieu de 206, *lisez* : 216.
Page 86, ligne 13, au lieu de $x=2+\frac{1}{24}$, *lisez* : $x=1+\frac{1}{24}$.
Page 87, ligne 21, au lieu de $x=\frac{1}{24}$, $x=\frac{1}{24}$, *lisez* : $x=\frac{1}{12}$, $x=\frac{1}{24}$.
Page 92, ligne 19, au lieu de $\frac{n}{2}$, *lisez* : $\frac{n}{2}+1$.
Page 96, ligne 13, au lieu de représentant y_0, *lisez* : représentant par y_0.
Page 107, ligne 21, au lieu de ${}^2z_2=\frac{1}{5}$, *lisez* : ${}^2z_2=\frac{1}{4}$.
Page 108, ligne 10, au lieu de on a $=1$, *lisez* : ou $a=1$.
Page 115, ligne 15, au lieu de l^2x^2, *lisez* : l^2x.
Page 116, ligne 17, au lieu de le, *lisez* : se.
ligne 19, au lieu de $1,5768.x$, *lisez* : $1,5708.x$.
Page 122, ligne 12, au lieu de $+e\sqrt{\ldots\ldots}$, *lisez* : $+r\sqrt{\ldots\ldots}$.
Page 125, ligne 3, au lieu de y'^2R^2, *lisez* : $y'^2=R^2$.
Page 127, ligne 7, au lieu de $n''d)^2$, *lisez* : $n''d^2)$.
Page 129, ligne 21, au lieu de $0,7754.L$, *lisez* : $0,7854L$.

MÉTHODES NOUVELLES

POUR DÉTERMINER LES RACINES

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

ET

LES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES OU DOUBLES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTICE HISTORIQUE DES TRAVAUX FAITS POUR DÉCOUVRIR LES RACINES DES ÉQUATIONS.

1. L'ART de découvrir les racines des équations numériques est un des problèmes les plus importans, puisque, en dernière analise, toutes les questions aboutissent à celle-là. Tous les calculs qu'on a faits, dit l'illustre *Lagrange*, sont en pure perte, si l'on n'a pas les moyens de résoudre ces équations. Dès le 3.me degré, l'expression algébrique des racines est insuffisante pour faire connaître, dans tous les cas, leur valeur numérique, et, à plus forte raison, il en serait de même pour les degrés supérieurs, si on parvenait enfin à découvrir l'expression générale des racines; il faudrait toujours recourir à d'autres moyens, pour trouver les valeurs numériques des racines d'une équation proposée (*Séances des écoles normales*; tom. 3, pag. 463, 476).

2. L'importance du problème des racines a été sentie par les plus grands géomètres, et il n'en est presque aucun qui n'ait cherché une méthode simple, directe et sûre pour les découvrir. Il m'a paru nécessaire de rapporter une esquisse des travaux entrepris sur cette matière ; tant pour mieux faire sentir les points de la difficulté, que pour signaler les écueils des routes qui ont été suivies : ce précis sera extrait, en partie, des ouvrages de *Lagrange*.

3. *Viète*, qui le premier s'occupa du sujet dont il s'agit, employa une méthode analogue à celle de l'extraction des racines des nombres ; *Harriot*, *Ougtred*, etc., cherchèrent à la simplifier ; « mais la » multitude des opérations qu'elle demande, et l'incertitude du succès » dans un grand nombre de cas, l'ont fait abandonner entièrement » avant la fin du 17.me siècle ». (*De la résolution des équations numériques*, par M. *Lagrange*, pag. 1.)

4. La méthode de *Viète* a fait place à celle de *Newton*, qui n'est, au fond, qu'un procédé d'approximation, puisqu'il faut déjà connaître une valeur de la racine, à moins de $\frac{1}{10}$ près. « Elle ne » sert, comme on voit, que pour les équations numériques qui sont » déjà à peu près résolues ; de plus, elle n'est pas toujours sûre : » elle a encore l'inconvénient de ne donner que des valeurs appro- » chées des racines mêmes qui peuvent être exprimées exactement » en nombres, et de laisser en doute si elles sont commensurables » ou non ». (*De la résolution des équations numériques*, pag. 3.)

Ce dernier reproche ne me paraît pas fondé ; car, quand une équation est proposée, on est censé l'avoir débarrassée, préalablement, des diviseurs commensurables, ce que l'on sait faire.

5. La méthode de *Daniël Bernouilli*, développée par *Euler* dans son *Introduction à l'analise infinitésimale*, n'est aussi qu'un moyen d'approximation. « Cette méthode et celle de *Newton*, quoique » fondées sur des principes différens, reviennent à peu près au » même, dans le fond, et donnent des résultats semblables ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 152.)

6. *Hude* trouva qu'en multipliant chaque terme d'une équation

par l'exposant de l'inconnue, et diminuant cet exposant d'une unité, on avait une nouvelle équation qui renfermait les conditions de l'égalité des racines; *Rolle* découvrit ensuite que les racines de la seconde sont les limites de celles de la première. Ce principe fut la base de sa *Méthode des cascades*. « La longueur des calculs que » cette méthode demande et l'incertitude qui naît des racines ima- » ginaires l'ont fait abandonner depuis long-temps ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 166.)

7. *Stirling* donna ensuite, pour trouver le nombre et les limites des racines des 3.me et 4.me degrés, une méthode qu'*Euler* a généralisée dans son *Calcul différentiel*. « Elle revient dans le » fond à celle de *Rolle* ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 166.)

8. Le célèbre *Fontaine* donna, sans démonstration, en 1747, une nouvelle méthode : je la donne, disait-il, pour l'analise en entier, que l'on cherche si inutilement depuis l'origine de l'algèbre. Cette méthode suppose que l'on peut toujours par la substitution des nombres 1, 2, 3, etc., au lieu de l'inconnue, dans les équations qu'elle emploie, trouver deux nombres qui donnent deux résultats de signes différens. « Ce qui n'a lieu, dit M. *Lagrange*, qu'autant » que ces équations ont des racines positives, dont la moindre » différence est plus grande que l'unité (ou, pour parler plus » exactement, qu'autant qu'il y a de ces racines qui ne sont pas » comprises en nombre pair entre deux nombres entiers consécutifs). » D'après cette considération, il est facile de trouver des exemples » où la méthode de *Fontaine* est en défaut ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 162.)

9. On voit, par ce qui précède, qu'on ne connaissait encore aucune méthode directe et sûre, dans tous les cas, lorsque l'illustre *Lagrange* publia, dans les *Mémoires de Berlin*, pour 1767, sa fameuse *Équation au quarré des différences des racines*; il fit voir qu'en mettant dans la proposée, à la place de x, les termes de la progression 0, D, 2D, 3D......., dans laquelle D marque un nombre moindre que la plus petite différence des racines, on

était assuré de rencontrer toutes les racines réelles, sans être exposé à passer par-dessus quelqu'une d'entre elles. La grande difficulté était de trouver ce nombre D : l'auteur indiqua trois moyens d'y parvenir.

Le premier consiste à former l'équation au quarré des différences des racines ; « mais, dit l'auteur, pour peu que le degré de l'équation pro-» posée soit élevé, celui de l'équation des différences monte si haut, » qu'on est effrayé de la longueur du calcul nécessaire pour trouver la » valeur de tous les termes de cette équation ; puisque le degré » de la proposée étant m, on a $\frac{m(m-1)}{2}$ coefficiens à calculer. (Par » exemple, pour une équation du dixième degré, la transformée » serait du 45.me). Comme cet inconvénient pouvait rendre la » méthode générale presque impraticable, dans les degrés un peu » élevés, je me suis long-temps occupé des moyens de l'affranchir » de la recherche de l'équation des différences ; et j'ai reconnu en » effet que, sans calculer entièrement cette équation, on pouvait » néanmoins trouver une limite moindre que la plus petite de ses » racines ; ce qui est le but principal du calcul de cette même » équation ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 124.)

Le second moyen de trouver D, fut publié dans les *Leçons* que l'auteur donna, en 1795, à l'école normale : il exige le calcul d'une équation du degré m, ayant pour ses racines les différentes valeurs dont est susceptible le coefficient Y de l'avant-dernier terme d'une équation en $(x-a)$; a étant une racine réelle quelconque de la proposée dont x est l'inconnue ; « mais cette équation en Y, dit M. *Lagrange*, » peut encore être fort longue à calculer, soit qu'on la déduise de » l'élimination, soit qu'on veuille la chercher directement par la » nature même de ses racines ». (*De la résolution*, *etc.*, pag. 127.)

Le troisième moyen fut publié en 1798 : il est une modification ou simplification du second, et, quoique moins rebutant que les deux premiers, il peut encore entraîner dans des calculs très-longs, suivant l'aveu de l'auteur. (*De la résolution*, *etc.*, pag. 223.)

Le nombre D, trouvé d'une de ces trois manières, pourra

» être souvent plus petit qu'il ne serait nécessaire pour faire découvrir » toutes les racines ; mais, dit M. *Lagrange*, il n'y a à cela d'autre » inconvénient que d'augmenter le nombre des substitutions successives » à faire pour x dans la proposée ». (*Séances des écoles normales*, tom. 3, pag. 466.) Cet inconvénient parait encore assez grave dans la pratique ; car il peut, en certain cas, donner lieu à des milliers et même à un nombre indéfiniment plus grand d'opérations superflues ; du reste, l'auteur l'a considérablement diminué, en donnant le moyen d'opérer, par de simples additions et soustractions, les substitutions des nombres entiers qui suivent celles des m premiers nombres 1, 2, 3, etc., dans une équation du degré m.

La méthode de *Lagrange* atteint-elle le but de son auteur ? « Celui de déterminer les premières valeurs à substituer pour x, » de sorte que d'un côté on ne fasse pas trop de tâtonnemens inutiles, » et que de l'autre on soit assuré de découvrir, par ce moyen, » toutes les racines réelles de l'équation ». (*Séances des écoles normales*, tom. 3, pag. 477.)

Après avoir rapporté le jugement de ce géomètre illustre, sur les travaux de ses devanciers, tout en rendant hommage à son génie immortel, il faut oser le juger lui-même. On est forcé de convenir que, si la théorie des racines lui doit beaucoup, l'art de les trouver dans la pratique ne lui a pas les mêmes obligations, et que sa méthode, la seule directe et rigoureuse jusqu'à lui, est néanmoins impraticable dans les degrés un peu élevés : il n'a pas rempli son objet, celui de trouver une méthode usuelle et assez facile pour pouvoir être enseignée dans les livres d'arithmétique, sauf à renvoyer les démonstrations à l'algèbre.

10. En 1807, M. *Budan* a publié une méthode nouvelle qu'il a cru propre à remplir le but de *Lagrange* ; mais l'Institut n'a approuvé que la première partie de son travail, qui est relative aux racines commensurables. Le grand écueil dans cette matière vient du mélange des racines imaginaires avec les réelles, et la méthode de l'auteur devient embarrassée dans cette recherche : elle

cesse alors d'être simple, directe et rigoureuse ; en un mot, la route qu'a suivi l'auteur dans son travail, d'ailleurs recommandable, ne parait pas encore être celle qui doit conduire au but désiré.

11. *Cagnioli*, dans sa *Trigonométrie*, *Kramp* (*Arithmétique universelle, etc.*), et *Legendre* (*Supplément à la théorie des nombres*), ont aussi donné des méthodes ; mais elles ne paraissent pas non plus exemptes des défauts de celles qui ont précédé.

12. Après avoir long-temps travaillé sur cette matière, j'ai cru apercevoir des routes qui n'avaient pas encore été suivies ; je m'y suis engagé, encouragé par cette réflexion, que les découvertes utiles n'ont pas toujours été faites par les plus habiles, mais quelquefois par les plus heureux. J'ai, en effet, trouvé des méthodes qui m'ont paru assez importantes pour mériter d'être publiées. Je vais donner une analise succincte du résultat de mes recherches, et du plan que j'ai suivi dans cet ouvrage.

13. Dans le chapitre II, je fais voir comment la courbe appelée parabolique, retrace à l'œil toutes les propriétés d'une équation déterminée, les théorèmes sur les racines, et les changemens qui surviennent dans les signes de la proposée, quand on déplace l'origine des abscisses. Ce dernier point de vue qui pourra paraître nouveau, jette le plus grand jour sur la matière, et a été pour moi la source de plusieurs découvertes.

Je rapporte ensuite plusieurs règles pour trouver des limites des racines, pour déterminer les racines commensurables, ainsi que celles qui sont égales.

Après ces notions préliminaires, j'expose, dans le chapitre III, une méthode nouvelle pour découvrir les racines incommensurables : elle est fondée d'une part sur les changemens qui surviennent, dans les variations des signes de la proposée, quand on déplace l'origine des abscisses : de l'autre, sur la connaissance préalable des limites des racines. Cette méthode peut être appelée *Méthode des limites successives*, ou encore, *Méthode des changemens d'abscisses* ; c'est en la comparant aux autres procédés connus, que les géomètres

pourront l'apprécier. Elle me paraît être, à la fois, directe, rigoureuse, sure, expéditive et facile.

Dans le chapitre IV, je donne des méthodes analitiques particulières aux 3.me, 4.me et 5.me degrés; ainsi que des méthodes graphiques qui m'appartiennent, pour trouver les racines des 3.me, 4.me, 5.me degrés, par l'intersection d'une parabole invariable servant pour toutes les équations du même degré, avec un cercle ou une parabole variables, suivant les coefficiens numériques de la proposée.

Dans le Vme chapitre, je rappelle la balance algébrique que j'ai déjà publiée, au moyen de laquelle on trouve promptement et presque sans calculs les racines réelles des équations d'un degré quelconque; mais j'ajoute des détails sur la manière d'exécuter cet instrument, ainsi qu'un procédé nouveau.

Le chapitre VI est consacré à déterminer les racines imaginaires des équations tant littérales que numériques. Ce problème a été traité par MM. *de Gua*, *Lagrange* et *Cauchi*; mais, leurs solutions qui dépendent d'équations auxiliaires nombreuses et d'un degré élevé, sont si compliquées qu'elles deviennent impraticables. J'ai trouvé sur cette matière un théorème simple et fécond qui, je crois, ne laisse plus rien à désirer sur cette matière; puisque ce problème, si difficile, se trouve réduit à la difficulté de celui qui est relatif à la détermination des racines égales. Je ne crains pas d'avancer que ce théorème est un pas important fait dans l'algèbre.

Enfin, dans le chapitre VII, je résous un autre problème qui fait suite au précédent : celui de distinguer, dans une équation proposée, les nombres respectifs des racines réelles soit positives, soit négatives, sans en connaître les grandeurs. Ma solution, qui se tire du même principe que la précédente, a aussi la même simplicité, et complète ce sujet.

En finissant cette esquisse, qu'il me soit permis de rendre hommage au génie de l'immortel *Descartes* : sa règle des signes joue le plus grand rôle dans cet ouvrage. C'est un principe fécond qui, associé à quelques autres, donne la clef des questions les plus épineuses d'algèbre.

CHAPITRE II.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

14. Deux voies se présentent pour découvrir les théorèmes relatifs aux racines : la 1.re consiste à considérer une équation comme un polynôme résultant du produit de plusieurs facteurs, et à raisonner d'une manière purement analitique, sur les combinaisons de ces facteurs. Dans l'autre, on considère le premier membre d'une équation comme l'ordonnée d'une courbe du genre parabolique : cette courbe retrace à l'œil, d'une manière nette et facile, toutes les propriétés des équations.

Je ne décide point laquelle de ces deux méthodes est préférable : chacune d'elles a, sans doute, des avantages particuliers ; mais la 2.me m'a fait trouver des théorèmes qu'il eût été difficile de lire dans des formules analitiques. L'art de découvrir des vérités mathématiques n'est, le plus souvent, comme en physique, que celui de bien observer. Quand une vérité est une fois reconnue par l'observation, il devient bien plus aisé de la démontrer par le calcul. Pour que *Newton* trouvât les lois du mouvement des planètes, il a fallu que *Képler* les eût observées.

15. Soit $X=0$ une équation déterminée dont l'inconnue est x ; si l'on construit la courbe, appelée parabolique, dont l'équation est $X=y$, elle fournit les remarques suivantes :

1.° La courbe est composée, en général, d'ondulations dont les branches serpentent au-dessus et au-dessous de l'axe O des x, comme on le voit dans les figures 2, 3, 4, 5 relatives aux équations des degrés 2, 3, 4, 5 ;

2.°

2.° Si X est de degré pair, la courbe (fig. 2 et 4) se termine par deux branches infinies qui se prolongent toutes deux au-dessus de l'axe des x. Si X est de degré impair (fig. 3 et 5), l'une des branches se prolonge indéfiniment au-dessus de l'axe, et l'autre en dessous;

3.° La courbe présente trois espèces de points remarquables, 1.° les points R_1, R_2, R_3,....... où la courbe rencontre l'axe et qui détermine les racines de la proposée : en ces points on a $y=0$ et $x=OR$; 2.° les sommets S_1, S_2, S_3,....... où l'ordonnée y devient un *maximum* ou un *minimum* : les abscisses de ces points sont, comme on sait, les racines de la première dérivée de $X=0$; 3.° les points I_1, I_2, I_3,........ où la courbure change de signe ; les abscisses de ces points d'inflexions sont les racines de la seconde dérivée de $X=0$.

4.° Si l'axe rencontre toutes les branches de la courbe, la proposée $X=0$ a toutes ses racines réelles.

5.° Si l'axe ne rencontre aucune branche, ce qui ne peut arriver que quand X est de degré pair, la proposée n'a que des racines imaginaires ; d'où il suit que toute équation de degré impair a, au moins, une racine réelle de signe contraire à celui du terme connu.

6.° Il y a autant de couples d'imaginaires, qu'il y a de sommets pour lesquels l'ordonnée est un *minimum* ; c'est-à-dire qui tournent leur convexité vers l'axe. Cette remarque est de la plus grande importance pour la détermination des racines imaginaires.

7.° Si l'axe touche la courbe dans un sommet, il y a deux racines égales dans la proposée.

8.° Le degré de la courbe étant 2, 3, 4, 5,.......m, le nombre de positions différentes et parallèles que l'axe des x peut avoir à l'égard de la courbe, est 3, 5, 7, 9,..........$2m-1$, dont chacune change le nombre et l'espèce des racines.

9.° Entre deux points de la courbe dont les ordonnées sont de signes contraires, il y a toujours un nombre impair d'intersections

avec l'axe, lequel correspond à un pareil nombre de racines réelles dans la proposée.

10.° Entre deux points dont les ordonnées sont de même signe, il existe o, 2, 4,....... c'est-à-dire, un nombre pair de racines soit réelles, soit imaginaires.

11.° Si, pour une même position de l'axe, on fait mouvoir l'origine O des coordonnés, en faisant $x=z+l$ dans $X=y$, le nombre des racines imaginaires ne change pas; mais, le rapport des racines réelles positives aux négatives change; de plus, la transformée en z éprouve un changement dans ses signes, chaque fois que l'origine O dépasse soit une branche de la courbe, soit une ordonnée de sommet S, soit une ordonnée de quelque point I d'inflexion.

12.° Si l'origine O est transportée sur un point de la courbe, le terme constant de la transformée en z s'anéantit; s'il est transporté sur une ordonnée de sommet, c'est l'avant-dernier terme, celui en z, qui s'anéantit; s'il est transporté sur une ordonnée de point d'inflexion, c'est l'antépénultième, celui en z^2, qui devient nul.

13.° Si l'origine dépasse une branche de la courbe, la transformée perd une variation; elle en perd deux si l'origine outrepasse, soit deux branches, soit une ordonnée *minima*, c'est-à-dire, de sommet convexe.

14.° Si l'origine dépasse un nombre impair de branches, le terme constant de la transformée en z change de signe; si ce nombre est pair, le terme ne change pas de signe.

15.° Le nombre des sommets S_1, S_2,...... est moindre d'une unité que le degré de la proposée, si sa dérivée a toutes ses racines réelles; mais la courbe perd autant de sommets que cette dérivée a de racines imaginaires.

16.° Quand on déplace l'origine O, l'avant-dernier terme de la transformée en z diminue à mesure que l'origine approche de l'ordonnée du sommet, pour devenir nul en ce point et changer

de signe après ce point ; mais, ce changement de signe n'a plus lieu si l'abscisse du sommet est imaginaire.

17.° Quoique l'abscisse d'un sommet soit imaginaire, (comme il arrive pour la figure 6 qui n'a qu'un sommet réel et deux imaginaires); la transformée en z perd deux variations, lorsque l'origine O dépasse l'ordonnée *minima* imaginaire.

18.° Quand on change la grandeur du terme constant de la proposée $X=y$, on fait mouvoir l'axe des x parallèlement à lui-même, sans changer sa direction.

19.° Quand on change la direction de l'axe des x, des racines réelles peuvent devenir imaginaires, des sommets réels disparaître, et réciproquement.

16. Je crois utile de rapporter encore ici quelques autres théorèmes sur les équations pour compléter ceux du numéro précédent.

1.° Les racines imaginaires sont toujours en nombre pair, et vont par couple de la forme $A+B\sqrt{-1}$] et $A-B\sqrt{-1}$], dont le produit est un facteur réel du second degré $(x-A)^2+B^2$.

2.° Une équation peut toujours être conçue comme le produit d'autant de facteurs $x-a$, $x-b$, ... qu'il y a d'unités dans l'exposant m de son degré; alors elle est divisible par $x-a$, $x-b$,...... elle peut aussi être considérée comme le produit des facteurs du 2.me degré ou du 3.me, etc.

3.° Lorsque la substitution de deux nombres n et n' à la place de x dans $X=0$, donne deux résultats de signe contraire, on est assuré qu'il existe un nombre impair de racines réelles dont la valeur est comprise entre n et n'.

Si les deux substitutions donnent des résultats de même signe, le nombre des racines réelles comprises est toujours pair, savoir, 0, 2, 4,....

4.° En mettant $-x$ pour $+x$, c'est-à-dire, en changeant les signes des termes de rang pair, ou bien ceux de rang impair, les racines positives deviennent négatives, et *vice versâ*, sans changer de grandeur; d'où il suit que quand on sait trouver les racines positives, on sait aussi trouver les négatives.

5.° Dans les équations de degré pair, si le dernier terme est négatif, il y a toujours au moins une racine réelle positive et une négative; mais, si ce terme est positif, on ne peut rien en conclure.

6.° Quand on met $z+l$ pour x dans $X=0$, le terme constant de la transformée est le même que si on avait mis seulement l pour x dans X; donc, si ce terme constant de la transformée est nul, l est une racine de $X=0$.

7.° On peut toujours préparer une équation de manière que le coefficient du premier terme soit l'unité, et que les autres soient des nombres entiers; alors ses racines ne peuvent être que des nombres entiers, ou des nombres fractionnaires irrationnels, mais non des fractions rationnelles.

8.° On connaît aussi le moyen de débarrasser une équation de ses racines égales.

9.° Une équation ne peut avoir plus de racines réelles positives qu'il n'y a de variations dans la succession des signes de ses coefficiens, ni plus de racines réelles négatives, qu'il ne s'y trouve de permanences de signes; c'est la fameuse règle de *Descartes*.

Il en résulte que, quand toutes les racines sont réelles, il y a précisément autant de racines positives que de variations, et autant de négatives que de permanences.

10.° Quand il manque un terme dans une équation, et que les deux termes voisins sont de même signe, elle a nécessairement des racines imaginaires; mais elle peut aussi en avoir, quoique cette condition n'existe pas.

On verra plus loin le théorème général, que j'ai trouvé le premier, sur la détermination des racines imaginaires, dans les équations de tous les degrés.

17. *Règles pour trouver les diviseurs commensurables.* Une racine en nombres entiers ne peut être que l'un des diviseurs du dernier terme.

Pour distinguer si le nombre a, diviseur du dernier terme, est racine de l'équation, après avoir divisé le dernier terme par a, on

retranchera ce quotient du coefficient de l'avant-dernier terme, et l'on divisera cette différence par a ; puis on soustraira ce quotient du coefficient de l'antépénultième terme, et ainsi de suite. Si tous ces quotiens sont des nombres entiers, et si, de plus, la différence entre le coefficient du deuxième terme de la proposée et le quotient précédent, sont l'unité, le nombre a sera racine de l'équation ; dans le cas contraire, il doit être rejeté.

On essaie à la fois tous les diviseurs du dernier terme, en formant un tableau. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de ce procédé, parce qu'on les trouve dans tous les élémens d'algèbre.

La méthode de M. *Budan* peut aussi être employée avantageusement, quand le terme connu n'est pas un grand nombre. (Voyez l'*Algèbre de Garnier*, pag. 402 et 403.)

18. *Des limites.* La méthode que nous exposerons dans le chapitre suivant, pour déterminer les racines réelles, suppose qu'on connaît déjà des limites de ces racines ; c'est pourquoi nous allons rapporter plusieurs procédés pour obtenir ces limites.

1.re *Règle.* Si, au coefficient du premier terme x^m d'une équation, on ajoute le plus grand coefficient de signe contraire, pris sans égard au signe, et qu'on divise la somme par ce premier coefficient, le quotient est plus grand que la plus grande racine positive : c'est la limite supérieure des racines positives.

Si on change $+x$ en $-x$ dans la proposée, le quotient obtenu par la règle précédente, est la limite supérieure des racines négatives.

Si on divise le terme constant par la somme de ce terme et du plus grand coefficient de signe contraire, abstraction faite de ce signe, le quotient est plus petit que la plus petite racine positive, c'est-à-dire, qu'il est la limite inférieure des racines positives.

Si on change $+x$ en $-x$ dans la proposée, le quotient obtenu par la dernière règle, est la limite inférieure des racines négatives.

2.me *Règle.* La proposée étant $x^m + \ldots\ldots = 0$, n étant l'exposant du premier des termes négatifs à partir de x^m et S le plus grand

coefficient négatif, la limite supérieure des racines positives sera $x=1+\sqrt[m-n]{S}\,]$.

La proposée étant écrite de manière que son dernier terme T soit positif, si S est le plus grand coefficient négatif, et n l'exposant du premier des termes négatifs, à partir du terme T, la limite inférieure des racines positives sera $x=\frac{1}{1+\sqrt[m-n]{\frac{S}{T}}\,]}$ (Voyez l'*Algèbre de Garnier*, pag. 422).

3.me *Règle*. En ajoutant successivement à l'unité une suite de fractions ayant pour numérateurs les coefficiens négatifs d'une équation proposée, pris positivement, et pour dénominateurs la somme de tous les coefficiens positifs qui les précèdent respectivement; le plus grand des nombres résultans pourra être pris pour limite supérieure des racines de cette équation. Il est entendu, au surplus, qu'il suffit de considérer le plus grand coefficient dans chacune des séries de termes négatifs (*Annales de mathématiques*, tom. VI, pag. 114).

Pour avoir la limite inférieure positive de x, on fera $x=\frac{1}{z}$, et ayant trouvé la limite supérieure de z; $\frac{1}{z}$ sera la limite inférieure de x.

On aurait les deux limites négatives de x en changeant préalablement les signes des termes de rangs pairs dans la proposée; c'est-à-dire, en changeant $+x$ en $-x$.

4.me *Règle*. On peut obtenir des limites plus approchées en faisant $x=rz$, r étant une indéterminée dont on fixe ensuite la valeur par la condition que la limite qui en résulte pour x soit la plus approchée. Ce perfectionnement, qui peut se faire par une espèce de tâtonnement, peut s'appliquer à chacune des méthodes précédentes.

Soit proposé, par exemple,

$(x-5)(x-6)(x-7)(x-10)=x^4-28x^3+287x^2-1280x+2100=0$;

par la 1.re règle, la limite inférieure positive est $x=\frac{2100}{2100+1280}=0,6$.

Pour avoir une limite plus approchée, je fais $x=rz$, la transformée est

$$r^4z^4-28r^3z^3+287r^2z^2-1280rz+2100=0 .$$

Si l'on prend r tel que $28r^3>1280r$ ou $r>7$, ce sera le terme $-28r^3z^3$ qui fournira la limite d'après la 1.re règle, laquelle sera $z=\frac{2100}{2100+28r^3}$, et par conséquent $x=\frac{2100r}{2100+28r^3}$. Cette fraction devient un *maximum* quand on prend $r=7$, et donne $x=1,4$ environ.

Si l'on prend $r<7$, c'est le terme $-1280rz$, qui fournit la limite, laquelle est pour la proposée $x=\frac{2100r}{2100+1280r}$. Cette fraction devient un *maximum* quand $r=7$ environ, et donne $x=1,3$; ainsi, la limite la plus approchée par cette méthode, est $x=1,4$. La vraie valeur est $x=5$.

5.me *Règle.* Si le second terme a un coefficient négatif qui ne soit surpassé par aucun des autres coefficiens négatifs, on prendra pour limite supérieure ce coefficient considéré comme positif et augmenté de l'unité, le premier coefficient étant supposé un.

Mais, si le plus grand coefficient négatif n'est pas celui du second terme, soient $-A_ix^{n-i}$ et $-A_kx^{n-k}$ les deux termes négatifs pour lesquels $\sqrt[i]{A_i}$ et $\sqrt[k]{A_k}$ sont les plus grands possibles ; il faudra prendre pour limite supérieure positive $x=\sqrt[i]{A_i}+\sqrt[k]{A_k}$.

Si la proposée n'avait qu'un seul terme négatif $-A_kx^{n-k}$, la limite de x serait simplement $\sqrt[k]{A_k}$.

En faisant $x=\frac{1}{z}$ et cherchant la limite supérieure de z, la limite inférieure de x sera $x=\frac{1}{z}$. (*Supplément à la théorie des nombres de Legendre*, pag. 28.)

19. *Des racines égales.* Il n'y a rien à ajouter sur cette matière qui est approfondie depuis long-temps : voici la règle connue.

Si la proposée est $X=0$, et sa première dérivée $X'=0$, en appelant D le plus grand commun diviseur entre X et X', ce diviseur D contiendra toutes les racines égales de la proposée ; mais élevée à une puissance moindre d'une unité. En divisant X par D, on aura une nouvelle équation qui ne contiendra plus de racines égales.

Le facteur D peut encore être composé lui-même de plusieurs facteurs différens entre eux, doubles, triples, etc. On le décomposera à son tour en l'égalant à *zéro*, et en opérant sur lui comme on a fait pour le polynôme X : on traiterait encore de la même manière le second diviseur commun E, et ainsi de suite.

Soit proposé, par exemple,

$$X=x^9+2x^8+x^7+6x^6+7x^5-2x^4+3x^3+2x^2-12x-8=0\,;$$

on a

$$X'=9x^8+16x^7+7x^6+36x^5+35x^4-8x^3+9x^2+4x-12=0\,.$$

On trouve

$$D=x^4+x^3+x^2+3x+2\,.$$

La dérivée de D est

$$D'=4x^3+3x^2+2x+3\,;$$

on trouve

$$E=x+1\,.$$

Divisant D par $(x+1)^2$, on a pour quotient

$$x^2-x+2\,.$$

Donc

$$D=(x^2-x+2)(x+1)^2\,.$$

Divisant X par $(x^2-x+2)^2(x+1)^3$, on a pour quotient

$$x^2+x-2\,.$$

Donc enfin

$$X=(x^2+x-2)(x^2-x+2)^2(x+1)^3\,.$$

CHAPITRE III.

CHAPITRE III.

MÉTHODE NOUVELLE POUR DÉTERMINER LES RACINES RÉELLES INCOMMENSURABLES.

20. La méthode que je vais exposer résulte des remarques faites dans le n.° 15, sur ce qui arrive dans l'équation $X=y$, quand on déplace l'origine O des x, en faisant $x=z+l$. Nous avons vu que la transformée en z perd 1, 2, 3, ... n variations, suivant que l'origine a dépassé 1, 2, 3, ... n racines réelles ou imaginaires : c'est ce principe qui seul va nous fournir la solution du problème.

Soit $X=0$ la proposée, $X=y$ la courbe parabolique (fig. 4, 5) qui représente la proposée ; O, l'origine des x ; l_1 la limite inférieure des racines positives de la proposée. Si on met dans $X=y$, z_1+l_1 au lieu de x, on aura une transformée $Z_1=y$, dans laquelle l'origine des z_1 sera placé quelque part en O'_1 entre la première origine et la branche la plus voisine ; soit ensuite l_2 la limite inférieure des racines positives des $Z_1=0$, si dans $Z_1=y$ on met z_2+l_2 au lieu de z_1, ou, ce qui revient au même, si on met $z_2+l_1+l_2$ au lieu de x dans $X=y$, on aura une deuxième transformée $Z_2=y$, pour laquelle l'origine de z_2 sera située quelque part en O''_2 entre O'_1 et la courbe.

Il est évident qu'en continuant ainsi à former de nouvelles transformées $Z_3=y$, $Z_4=y$ ...., l'origine des abscisses se rapprochera continuellement de la courbe : la racine cherchée sera exprimée par $x=l_1+l_2+l_3$ ......, et l'on pourra en approcher d'aussi près qu'on

voudra, sans jamais craindre de la dépasser : si cette racine était commensurable, la série l_1, l_2, l_3,........ se terminerait quand l'origine serait transportée sur la courbe ; alors le terme constant des transformées successives, qui va toujours en diminuant, deviendrait nul.

Voilà donc un procédé direct et infaillible de trouver la plus petite racine positive avec le degré d'exactitude dont on a besoin : voyons comment la même méthode peut faire découvrir les autres racines (*).

Si on connaissait la loi de décroissement des limites successives l_1, l_2, l_3........, on pourrait, en sommant cette série, avoir la valeur exacte de x : on voit encore que si l_4 est un nombre un peu plus grand que la vraie valeur de la plus petite racine positive, et qu'on mette z_4+l_4 dans $X=y$, à la place de x, cette nouvelle transformée $Z_4=y$ aura une variation de moins que la dernière transformée $Z_3=y$, à laquelle on s'est arrêté, et qui, elle-même, a perdu autant de fois deux variations que l'origine O a rencontré d'ordonnées *minima* pour parvenir à la courbe. (Voyez le 13.° du n.° 15).

Il suit de là qu'on pourra continuer les transformées en choisissant pour l_4 un nombre tel que $Z_4=y$, ait une variation de moins que $Z_3=y$; ce choix peut se faire à l'inspection de l_1, l_2, l_3, et si on ne rencontrait pas un nombre convenable, un second essai suffirait toujours ; mais, il faut bien remarquer que ce nombre l_4, qui doit être plus grand que la limite inférieure de $Z_3=0$, n'est point une limite. Ayant une fois obtenu la transformée $Z_4=y$, qui a une variation de moins que $Z_3=y$, on continue une nouvelle

(*) On pourrait, comme a fait M. *Legendre*, abaisser la proposée d'un degré en divisant la proposée par $x-l_1-l_2-l_3$ ....; mais le reste des divisions n'est pas exact, parce que le diviseur ne l'est pas, et il en résulte des inconvéniens qui peuvent être graves dans certains cas.

série de transformées, dans lesquelles l_5, l_6 ......, sont les limites inférieures de $Z_4=o$, $Z_5=o$, ...On arrivera par ce moyen à l'expression de la seconde racine qui est $x=l_1+l_2+l_3+l_4+l_5$, ... On suivra la même marche pour trouver toutes les autres racines de la proposée. Le procédé sera uniforme et constant : il n'y aura d'irrégulier qu'un essai, au plus, à chaque rencontre d'une branche nouvelle, pour que la nouvelle transformée perde une seule variation.

On pourra aussi trouver la plus grande racine positive que j'appelle x_1, en mettant, dans $X=o$, $L-x_1$, pour x (L étant la limite supérieure positive de $X=o$), et traitant la transformée $X_1=o$, qui aura toutes ses racines positives, comme on a fait pour $X=o$. La plus petite racine positive de $X_1=o$ sera la plus grande de $X=o$, et la plus grande de $X_1=o$ sera la plus grande négative de $X=o$, si celle-ci en a.

On peut encore avoir les racines négatives de $X=o$, en y changeant $+x$ en $-x$; par là les négatives deviendront les positives ; et *vice versâ.*

On voit, par ce qui précède, que si la proposée a plus de deux racines réelles positives et de deux négatives, on trouvera directement les deux plus grandes et les deux plus petites ; ce qui établit une ligne de démarcation entre le 4.me degré et le 5.me qui exige un essai de plus, pour les racines comprises entre les extrêmes.

Afin de faciliter la formation des transformées successives en z, on emploira les formules suivantes.

Soit la proposée

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5 \ldots\ldots\ldots+x^m=o=X \;;$$

en y substituant $z+l$ pour x, on a la transformée suivante

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5 \ldots\ldots\ldots+z^m=o=Z \;,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$A = a + bl + cl^2 + dl^3 + el^4 + fl^5 \ldots\ldots + l^m$$

$$B = b + 2cl + 3dl^2 + 4el^3 + 5fl^4 \ldots\ldots + ml^{m-1}$$

$$C = c + 3dl + 6el^2 + 10fl^3 \ldots\ldots + m\,.\frac{m-1}{2}\,l^{m-2}$$

$$D = d + 4el + 10fl^2 \ldots\ldots + m\,.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.l^{m-3}$$

$$E = e + 5fl \ldots\ldots + m\,.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.l^{m-4}$$

$$F = f \ldots\ldots + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}.l^{m-5} \quad (*)$$

. . . .

L'usage de ces formules est simple. Pour avoir les transformées successives $Z_1=0$, $Z_2=0$, $Z_3=0$......, il suffit de mettre dans $Z=0$ successivement, l_1, l_1+l_2, $l_1+l_2+l_3$......, au lieu de l; c'est-à-dire qu'il faut faire ces substitutions dans les expressions de A, B, C........, pour avoir les valeurs numériques de ces lettres et les rapporter dans $Z=0$.

21. *Simplification de la méthode.* En réfléchissant sur la méthode précédente, on sentira qu'on peut diminuer le nombre des transformées, en employant pour l, au lieu des nombres l_1, l_1+l_2, $l_1+l_2+l_3$,....... d'autres nombres un peu plus grands, tels que les auraient procuré une règle plus parfaite pour les

---

(*) Les coefficiens A, B, C,......... dérivent les uns des autres par la loi de différentiation,

$$B = \frac{dA}{dl}\;;\quad C = \frac{dB}{2dl}\;;\quad D = \frac{dC}{3dl}\;;\quad E = \frac{dD}{4dl}\;;\quad F = \frac{dE}{5dl}\;\ldots\ldots$$

limites : on pourra même, lorsqu'on sera parvenu à une valeur de x, approchée à moins de $\frac{1}{10}$ de sa vraie valeur, prendre pour limite inférieure de la dernière transformée, le nombre $\frac{-A}{B}$ (*), fourni par cette dernière transformée. A la vérité, il pourra arriver quelquefois qu'on passe par-dessus la racine cherchée ; mais on en sera de suite averti, parce que la nouvelle transformée aura perdu 1, 2, 3,......... variation, et l'on reviendra sur ses pas.

La circonstance de deux variations perdues, mérite d'être remarquée ; elle a lieu dans deux cas ; 1.° si l'on a dépassé deux branches de la courbe très-voisine ; 2.° si l'on a dépassé une ordonnée *minima* ou de sommet convexe, laquelle est réelle ou imaginaire, suivant que les racines de la dérivée de $X=0$ sont elles-mêmes réelles ou imaginaires (**) : ces deux cas sont faciles à distinguer, en se rappelant les remarques 6.°, 12.°,.......16.° du n.° 15. En effet, dans le premier cas seulement, le terme constant qui a diminué à mesure que l'origine s'approchait de la courbe, est devenu très-petit et voisin de zéro.

Au reste, pour éviter toute incertitude, on regardera comme non avenue la dernière transformée qui a perdu deux variations ; on en formera une nouvelle, d'après la méthode générale du n.° précédent ; c'est-à-dire, en prenant pour l le nombre qui a servi à former la transformée Z_{n-1} (Z_n étant celle qu'on a abandonnée) ; et en ajoutant à ce nombre la limite inférieure de Z_{n-1}. Alors, si la nouvelle transformée Z_n perd encore deux variations, on sera assuré

(*) C'est la méthode de *Newton* ; mais rectifiée et rendue sûre par un mode de vérification tiré de nos principes.

(**) La transformée perd aussi deux variations si l'on dépasse deux racines égales : alors A et Bz dans l'équation $Z=0$, après avoir diminué ensemble, s'anéantissent, puis reparaissent avec un signe différent : au surplus, la proposée est censée avoir été débarrassée des racines égales, quoiqu'elles ne soient pas un obstacle.

que les deux racines douteuses qu'on a outre-passées sont imaginaires ; et l'on continuera l'opération sans s'en inquiéter.

Par ce moyen, le procédé du présent n.° sera aussi sûr que celui du précédent ; mais il fera marcher à plus grand pas sur l'axe des x, et l'on reconnaitra plus promptement toutes les racines l'une après l'autre.

22. *Exemple.* Soit proposé

$$2-6x+7x^2-5x^3+x^4=0=X \text{ , (*)}$$

d'après la première règle du n.° 18, la limite inférieure positive de X est $l_1=\frac{2}{2+6}=0,3$; et je substitue 0, 3 au lieu de l dans les expressions de A, B, C, D du n.° 20 qui sont ici

$$A=2-6l+7l^2-5l^3+l^4 \text{ ,} \qquad B=-6+14l-15l^2+4l^3 \text{ ,}$$

$$C=7-15l+6l^2 \text{ ,} \qquad D=-5+4l \text{ ;}$$

par là la formule

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+z^4=0=Z \text{ ,}$$

donne pour première transformée

$$z_1^4-3,8z_1^3+3,04z_1^2-3,042z_1+0,7031=0=Z_1 \text{ ;}$$

Je prends pour limite de $Z_1=0$, $l_2=0,2$, et je mets 0,3+0,2 ou 0,5 pour l, dans la formule de transformation $Z=0$; il vient pour deuxième transformée

$$z_2^4-3z_2^3+z_2^2-2,25z_2+0,1875=0=Z_2 \text{ ;}$$

(*) Ou $(x^2-x+1)(x^2-4x+2)=0$.

Je prends pour limite de $Z_3=0$, $l_3=0{,}08$, et je mets dans la formule $Z=0$, $0{,}3+0{,}2+0{,}08$ ou $0{,}58$ pour l; il vient pour troisième transformée

$$z_3^4-2{,}68z_3^3+0{,}3184z_3^2-2{,}145552z_3+0{,}01240496=0=Z_3 .$$

La petitesse du terme constant de cette troisième transformée m'avertit que l'origine des abscisses approche fort près de la courbe , et que je puis , sans inconvéniens , prendre pour limite de la dernière transformée en z_3 , (abscisse devenue assez petite)

$$l_4=\frac{-A}{B}=\frac{0{,}01240496}{2{,}145552}=0{,}00578 ,$$

et j'ai , pour la plus petite racine cherchée ,

$$x'=l_1+l_2+l_3+l_4=0{,}58578 .$$

En mettant $0{,}58578$ pour l, dans la formule $Z=0$, on aurait une quatrième transformée $Z_4=0$ qui fournirait une valeur $x'=0{,}58578-\frac{A}{B}$ beaucoup plus approchée que la précédente $\left(\frac{-A}{B}\right.$ étant fourni par $\left.Z_4=0\right)$.

Je passe à la recherche de la deuxième racine. Je mets $0{,}6$ pour l dans la formule $Z=0$, et j'ai, pour quatrième transformée,

$$z_4^4-2{,}6z_4^3+0{,}16z_4^2-2{,}136z_4-0{,}0304=0=Z_4 ,$$

qui, ayant perdu une variation , m'apprend que l'origine a dépassé une branche.

Je mets $0{,}62$ pour l dans la formule $Z=0$, et j'ai , pour cinquième transformée ,

$$z_5^4-2{,}52z_5^3+0{,}0064z_5^2-2{,}133312z_5-0{,}07307664=0=Z_5 .$$

Pour avancer plus rapidement, je mets 1 pour l dans $Z=0$, et il vient une sixième transformée qui a deux variations de moins que la précedente : j'en conclus qu'il y a deux racines entre $x=0,62$ et $x=1$; il s'agit de savoir si elles sont réelles ou imaginaires. Je pourrais déja deviner qu'elles sont imaginaires, parce que le terme A ne tend pas vers zéro dans les dernières transformées. Afin d'en être plus sûr, je prends la limite inférieure de $Z_5=0$, laquelle est $\frac{0,07307664}{0,07307664+1}=0,07$ environ, et je l'ajoute avec 0,62 : je mets la somme 0,69 pour l dans $Z=0$; il vient une nouvelle transformée qui a encore deux variations de moins que $Z_5=0$; d'où je conclus avec certitude que les deux racines douteuses sont imaginaires.

Je procède donc à la recherche de la quatrième racine qui est nécessairement réelle, et, comme il n'y a aucune incertitude à craindre, j'emploie la méthode commune. Je substitue successivement pour x dans la proposée $X=0$, 1, 2, 3, 4, et ayant reconnu, par deux résultats de signes contraires, que la racine cherchée est entre 3 et 4, et ensuite qu'elle est entre 3, 4 et 3, 5 ; je mets 3, 4 pour l dans les valeurs de A, B, et j'ai pour la quatrième racine $x=3,4-\frac{A}{B}$ ou $x=3,4142$. On pouvait aussi procéder comme à la fin du n.° 20.

23. *Autre simplification.* On peut encore abréger les calculs de la méthode précédente, ainsi qu'il suit.

Je construis la courbe $X=y$ en calculant seulement quelques ordonnées de loin en loin (ce qui peut se faire promptement par la méthode n.° 39) : cette esquisse de la courbe suffit, d'ordinaire, pour en connaître le cours et les particularités, ainsi que pour avoir une première valeur approchée des racines : on les détermine ensuite avec plus d'exactitude par la méthode de *Newton* qui est, le plus souvent, sans inconvénient.

S'il arrive que quelques sommets convexes s'approchent assez près de l'axe des x pour faire douter si cet axe doit couper la courbe en

en ce point, on calcule quelques ordonnées intermédiaires qui suffisent, presque toujours, pour lever le doute.

Enfin, si cela ne suffit pas pour lever l'incertitude, on a recours à la méthode précédente; mais seulement pour les points douteux.

On sent que cette deuxième méthode doit être plus prompte que la première, puisque, au lieu d'être obligé de calculer tous les coefficiens A, B, C, D,....., il suffit, pour l'ordinaire, de connaître A et B. Dans l'exemple du numéro précédent, la courbe n'a qu'un sommet concave, et l'ordonnée *minima* de sommet convexe est imaginaire (fig. 6). La méthode du présent numéro s'applique ici avantageusement, parce que la figure ne présente aucun point douteux qui exige l'emploi de la méthode générale des numéros 20 et 21.

24. *Remarque sur les limites.* La méthode de ce chapitre serait plus expéditive en ce qu'elle exigerait moins de transformations, si l'on avait une règle qui procurât une première limite plus approchée: *Newton* en a donné une qui est fautive dans beaucoup de cas, et qu'il est utile de signaler.

Si, dans $X=0$, on met $z+l$ pour x, on a une transformée $Z=0$: si, dans celle-ci, on met pour l un nombre tel que Z ait tous ses termes positifs (nombre qu'il faut trouver par tâtonnement), il est évident que l sera une limite supérieure de $X=0$, et qu'en diminuant ce nombre, on approchera de plus près de la racine. Cette conséquence de *Newton* sera vraie, si la plus grande racine positive est réelle; mais, si cette plus grande racine est un couple imaginaire, on ne pourra le dépasser sans que la transformée perde deux permanences; on pourra être encore bien loin de la plus grande racine positive réelle : la limite trouvée sera très-peu approchée, et la règle sera en défaut; aussi je ne l'ai rapportée que pour empêcher de la confondre avec les procédés de ma méthode (Voyez l'*Algèbre de Garnier*, pag. 424, où le défaut de cette règle n'a pas été remarqué).

25. *Réflexions.* Après avoir exposé notre méthode, il ne sera pas

4

inutile de la comparer avec celles qui sont le plus en usage, afin de faire mieux sentir les points de la difficulté à vaincre, et le but qu'il fallait atteindre.

Le moyen qui se présente le plus naturellement pour découvrir les racines, c'est de substituer dans X, pour x, des nombres tant positifs que négatifs, en progression arithmétique, jusqu'à ce qu'on ait obtenu des résultats de signes contraires : on est alors assuré qu'il existe un nombre impair de racines entre les deux nombres qui ont procuré ces résultats; mais il est évident qu'on peut dépasser un nombre pair de racines, sans obtenir des résultats de signes contraires : ainsi, ce premier moyen n'est ni sûr ni suffisant.

Newton supposa cette première difficulté levée, et donna une méthode pour approcher de plus près de la racine déjà trouvée; mais *Lagrange* fit voir qu'il pouvait arriver, dans certain cas, qu'on s'éloignât de la vraie valeur, au lieu de s'en approcher. « L'usage » de la méthode dont il s'agit n'est sûr que lorsque la valeur ap- » prochée α est à la fois ou plus grande ou plus petite que chacune » des racines réelles de l'équation, et que chacune des parties réelles » des racines imaginaires; et, par conséquent, cette méthode ne » peut être employée sans scrupule que pour trouver la plus grande » ou la plus petite racine d'une équation qui n'a que des racines » réelles, ou qui en a d'imaginaires, mais dont les parties réelles sont » moindres que la plus grande racine réelle, ou plus grande que » la plus petite de ces racines ». (*De la résolution*, *etc.*, par *Lagrange*, pag. 141.)

Nous avons déjà vu (n.° 9) que la méthode de *Lagrange* est impraticable, 1.° à cause de la difficulté de trouver le nombre D à substituer pour x, lequel doit être plus petit que la plus petite différence des racines; 2.° parce qu'elle peut exiger, en certains cas, des milliers de substitutions.

La méthode de *Budan* serait préférable, sans l'embarras qui résulte des racines imaginaires, et la nécessité de calculer les décimales l'une après l'autre.

Si je ne me fais illusion, toutes les difficultés disparaissent dans ma méthode. Par le procédé du n.° 20, on trouve, sans incertitude, toutes les racines l'une après l'autre, en parcourant l'axe des x; veut-on marcher plus rapidement, le n.° 21 en fournit le moyen: s'il arrive qu'on ait fait un pas trop grand, on en est averti sur-le-champ par les changemens survenus dans les variations de la transformée : la règle de *Descartes* est là comme une boussole qui indique, à chaque instant, le point où l'on se trouve. Enfin, veut-on un procédé encore plus facile et plus lumineux, le n.° 23 le fournit. Le tracé grossièrement fait de la courbe indique, d'un seul coup-d'œil, les points scabreux ou douteux qui exigent l'emploi de la méthode générale : dans tous les autres points, on marche à grand pas et sans précautions, parce qu'il n'y a pas d'écueil à éviter.

On a pu remarquer que notre expression $\frac{-A}{B}$ du n.° 21, pour avoir une limite plus approchée, ressemble à la méthode de *Newton*; mais, on doit faire attention que l'inconvénient, aperçu par *Lagrange*, n'a plus lieu ici, parce que les changemens survenus dans les variations, font connaître à chaque instant la position de l'origine à l'égard des branches de la courbe.

On pourrait encore, au premier abord, confondre nos transformées en z_1+l_1, z_2+l_2 ...... avec celles de M. *Budan* en $x-1$, $x-2$ ......; mais, nos deux méthodes n'ont absolument rien de commun : dans les transformées de M. *Budan*, l'origine des abscisses x ne change point : dans la nôtre, au contraire, l'origine des z_1, z_2, ..., se meut en se rapprochant de la courbe, et c'est ce mouvement de l'origine combiné avec les changemens de variations, qui constitue le principe de notre méthode, principe qui diffère essentiellement de tous ceux qui ont été employés jusqu'à ce jour.

Dans ce chapitre, j'ai supposé qu'on ignorait, avant d'entreprendre de résoudre l'équation, le nombre de ses racines imaginaires, afin que le commun des lecteurs n'eût besoin que de connaître la méthode de ce chapitre; mais quand on connaîtra la règle du chapitre VI,

sur les racines imaginaires, on marchera d'un pas plus assuré dans la recherche des racines réelles.

Quant à la méthode de M. *Legendre*, fondée sur la considération des fonctions omales, elle diffère trop de la mienne pour qu'il soit besoin de les comparer.

CHAPITRE IV.

MÉTHODES ANALITIQUES ET GRAPHIQUES, PARTICULIÈRES AUX 3.me, 4.me ET 5.me DEGRÉS.

Je vais rapporter des méthodes analitiques connues, et d'autres graphiques qui m'appartiennent, lesquelles sont particulières aux cinq premiers degrés, et sont plus expéditives que la méthode générale du chapitre précédent.

Troisième degré.

26. *Cas de deux racines imaginaires.* La proposée étant $x^3+px+q=0$, on sait qu'elle a deux racines imaginaires, si $4p^3+27q^2$ est positif. Dans ce cas, on trouve la racine réelle par la formule générale connue

$$x'=-\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right]}-\sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right]}\,;$$

On trouve aussi le facteur réel du deuxième degré, en divisant x^3+px+q par $x-x'$, et on a

$$x^2+xx'+p+x'^2=0\,.$$

27. *Cas irréductible.* Ce cas a lieu quand $4p^3+27q^2$ est négatif: alors les trois racines sont réelles; mais elles se présentent sous une

forme imaginaire dans les trois formules générales : on peut les obtenir par des séries qui ont l'inconvénient d'être trop peu convergentes : la méthode suivante due à *Clairaut* est préférable (Voyez son *Alg.* pag. 298).

Le cas irréductible n'ayant lieu que quand p est négatif, la proposée sera de cette forme

$$x^3 - px \pm q = 0 \; .$$

On aura une racine x' approchée à moins d'un millième près, dans les cas les plus défavorables, par cette formule,

$$x' = \mp \tfrac{1}{3}\sqrt{p}\,] \mp \tfrac{1}{3}\, 7\sqrt{\left[p \pm \frac{3q}{\sqrt{p}}\right]} \; ,$$

dans laquelle le signe supérieur répond à q positif, et *vice versâ.*

On aura ensuite une valeur plus approchée de x', par la méthode de *Newton.*

Les deux autres racines x'', x''' seront données par l'équation $x^2 + xx' - p + x'^2 = 0$, comme ci-devant.

On trouve aussi les racines des équations des 2.me, 3.me et 4.me degrés par les lignes trigonométriques ; mais, ce moyen étant moins simple et moins expéditif que bien d'autres, nous ne le rapporterons pas ici (Voyez l'*Analise algébrique de Garnier*, pag. 257).

28. ***Racines égales.*** Elles sont le passage des racines réelles aux imaginaires : on a vu, dans le n.° 19, comment on les trouve : il est utile d'avoir, pour le troisième degré, des formules qui les donnent immédiatement.

Soit la proposée

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \; ;$$

elle aura deux racines égales si (Voyez le n.° 43) on a la condition

$$27c^2+2ac(2a^2-9b)+b^2(4b-a^2)=0 \; .$$

Les deux racines égales seront

$$x''=x'''=-\frac{a}{3}\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{a^2-3b}] \; .$$

La racine inégale sera

$$x'=-\frac{a}{3}\mp\tfrac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}] \; .$$

Le signe supérieur a lieu quand la quantité $2a^3-9ab+27c$ est positive. Ce sont les signes inférieurs qui sont relatifs au cas où cette même quantité est négative.

Pour démontrer ces formules, il suffit de comparer, terme à terme, la proposée $X=0$, avec celle-ci,

$$(x-x')(x-x'')^2=0 \; .$$

Quant à la règle relative au double signe $\pm$, on la découvre en faisant disparaître le deuxième terme de la proposée qui devient de la forme $x^3+px+q=0$, et l'on a alors

$$x''=x'''=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q}]=\pm\sqrt[2]{\frac{-p}{3}}] \; ;$$

et

$$x'=-\sqrt[3]{4q}]=\mp 2\sqrt[2]{\frac{-p}{3}}] \; ,$$

d'où l'on déduit aisément la règle du double signe.

29. *Construction graphique.* Les géomètres ont long-temps cherché les racines par des intersections de courbes : on en fait moins usage aujourd'hui, à cause du temps qu'exige leur description ; mais, on n'avait pas fait attention que la même courbe peut servir pour toutes

les équations du même degré, du moins pour le 3.me, le 4.me et le 5.me. J'ai fait, le premier, cette remarque utile dans mes *Opuscules*, pag. 116. Par ce perfectionnement, la méthode des courbes devient précieuse : elle est la plus expéditive de toutes ; elle donne les racines approchées à moins de $\frac{1}{100}$ près : la méthode rectifiée de *Newton* fournit ensuite le degré d'approximation dont on a besoin.

Soit la proposée

$$x^3+px+q=0\ ; \qquad (1)$$

je fais $x=lz$, et j'ai la transformée

$$l^3z^3+lpz+q=0\ , \qquad (2)$$

qu'on peut remplacer par le système de ces deux-ci

$$z^3=y\ , \qquad (3)$$

$$l^3y+lpz+q=0\ ; \qquad (4)$$

dont la première représente une parabole cubique, et la deuxième une ligne droite.

Il est évident que la parabole $z^3=y$ étant tracée sur un carton, si l'on construit, sur ce même carton, la droite de l'équation (4), les abscisses des points d'intersection seront les racines de la transformée (2), et la relation $x+lz$ donnera les racines de la proposée (1).

l est une constante indéterminée qui a pour objet d'empêcher que les points d'intersections de la parabole et de la droite ne tombent en dehors du carton : voici le moyen le plus simple d'obvier à cet inconvénient. On prendra pour l le plus grand coefficient négatif de la proposée, augmenté de l'unité : par ce moyen, toutes les racines de la transformée en z seront plus petites que l'unité. Si

Si donc, la plus grande abscisse AZ (fig. 7) a été prise pour l'unité, tous les points d'intersection seront compris dans les deux quarrés $AZBY$, $AZ'B'Y'$.

Quant à la manière de construire la droite de l'équation (4), elle est simple ; il suffit de chercher les points où elle coupe deux des quatre côtés du quarré, en faisant dans (4) successivement

$$z=0\ ,\quad y=0\ ,\quad z=1\ ,\quad y=1\ .$$

Remarquons encore qu'on peut éviter, pour diminuer l'étendue du carton, de construire la moitié AB' de la parabole, qui donne les racines négatives de z : en effet, après avoir trouvé les racines positives, il suffit de changer $+z$ en $-z$ dans (2), et les racines positives de la nouvelle transformée seront les négatives de l'équation (2) ; mais il faudra construire deux droites au lieu d'une.

Dans le carton que j'emploie, l'unité AZ a été faite de 200 millimètres et à chaque division on a mené l'ordonnée correspondante.

M. *Monge* (*Correspondance de l'école polytechnique*, an 1815) a donné une méthode qui ne diffère de la précédente qu'en ce qu'il n'emploie pas l'indéterminée l, ce qui exige une étendue beaucoup plus grande pour la courbe, et rend la méthode moins simple. Il doit m'être permis de faire observer que mes *Opuscules*, où la méthode est expliquée à peu près comme je viens de le faire, ont paru environ cinq ans avant l'article de M. *Monge* : sans doute cet habile géomètre m'aurait cité s'il avait connu mes *Opuscules*, puisqu'il a attaché assez d'importance à cet objet, pour faire graver des tableaux destinés à remplacer le carton.

30. *Table des racines.* Reprenons la proposée

$$x^3+px+q=0\ .$$

Si on fait $x=\frac{qz}{p}$, on aura, en posant $\frac{p^3}{q^2}=r$, la transformée

$$z^3+r(z+1)=0\ ;$$

cette équation n'ayant plus qu'une seule constante r, il est évident qu'en prenant pour r une série de nombres positifs, puis une autre série de nombres négatifs, on pourra chercher toutes les racines de z, correspondantes à tous les nombres des deux séries, et en former une table qui fera connaître les racines de la proposée par le moyen de la relation $x=\frac{qz}{p}$, en cette manière.

Soit proposé, par exemple,

$$x^3-2x+7=0\,;$$

on a ici

$$p=-2\ ,\ q=7\ ,\ r=\frac{p^3}{q^2}=\frac{-8}{49}=-0{,}163\ .$$

Il n'y aura qu'à chercher, dans la table et dans la colonne de r, ce nombre $-0{,}163$, et l'on trouvera vis-à-vis, dans la colonne des racines, celles de z, qu'il ne s'agira plus que de multiplier par $\frac{q}{p}=\frac{-7}{2}$, pour avoir les racines cherchées de x.

Cette table, qui ne serait pas très-étendue, fournirait, sans contredit, le moyen le plus expéditif d'avoir les racines du troisième degré: il serait à désirer que quelque géomètre prît la peine de la calculer: il est à regretter qu'une table pareille ne puisse pas avoir lieu pour les autres degrés.

Quatrième degré.

31. *Méthode analitique.* 1.° Soit la proposée

$$x^4+px^2+qx+r=0\ ; \qquad (1)$$

elle aura deux racines imaginaires et deux réelles, si la quantité

$$4p^3(4pr-q^2)+9q^2(16pr-3q^2)+128r^2(2r-p^2)\ ,$$

est négative (Voyez le n.° 44).

Pour avoir les deux racines réelles x', x'' de la proposée, on posera

$$-\frac{p^2}{48}-\frac{r}{4}=p'\,;\quad -\frac{p^3}{864}+\frac{pr}{24}-\frac{q^2}{64}=q'\,;$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q'+\sqrt{\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}}}=A\,;\quad \sqrt[3]{\frac{q'}{2}-\sqrt{\frac{q'^2}{4}+\frac{p'^3}{27}}}=B\,;$$

et l'on aura

$$x'=\pm\sqrt{-\frac{p}{6}-A-B}$$

$$\pm\sqrt{A+B-\frac{p}{3}+\sqrt{\left(A+B-\frac{p}{3}\right)^2+3(A-B)^2}}\,;$$

$$x''=\pm\sqrt{-\frac{p}{6}-A-B}$$

$$\mp\sqrt{A+B-\frac{p}{3}+\sqrt{\left(A+B-\frac{p}{3}\right)^2+3(A-B)^2}}\,,$$

le signe supérieur ayant lieu pour le cas de q négatif, et *vice versâ.* Pour le même cas, on aura les racines imaginaires x''', x^{IV}, par les formules suivantes :

$$x'''=\mp\sqrt{-\frac{p}{6}-A-B}$$

$$\pm\sqrt{A+B-\frac{p}{3}-\sqrt{\left(A+B-\frac{p}{3}\right)^2+3(A-B)^2}}\,,$$

$$x^{\text{IV}}=\mp\sqrt{-\frac{p}{6}-A-B}$$

$$\mp\sqrt{A+B-\frac{p}{3}-\sqrt{\left(A+B-\frac{p}{3}\right)^2+3(A-B)^2}}\,;$$

(*Analise de Garnier*, pag. 4, 217, 225).

2.° Les quatre racines de la proposée seront toutes imaginaires si l'on a les trois conditions

$$4p^3(4pr-q^2)+9q^2(16pr-3q^2)+128r^2(2r-p^2)$$

positif ; p positif ; p^2-4r négatif (n.° 44) : on aura x', x'', x''', x^{IV} ; par les quatre formules ci-dessus du 1.°

3.° *Cas irréductible.* Les racines seront toutes réelles si p est négatif et que p^2-4r soit positif, ainsi que

$$4p^3(4pr-q^2)+9q^2(16pr-3q^2)+128r^2(2r-p^2) .$$

Pour avoir les racines de la proposée, on cherchera celles u', u'', u''', de cette réduite

$$u^3+p'u+q'=0 ;$$

dans laquelle on a

$$p'=-\frac{p^2}{48}-\frac{r}{4} ; \quad q'=-\frac{p^3}{864}+\frac{pr}{24}-\frac{q^2}{64} ;$$

ces racines, qui seront toutes réelles, se trouveront comme dans le n.° 27. On aura ensuite x', x'', x''', x^{IV}, par les formules générales suivantes,

$$x'=\pm\sqrt{u'-\frac{p}{6}}\pm\sqrt{u''-\frac{p}{6}}\pm\sqrt{u'''-\frac{p}{6}} ,$$

$$x''=\pm\sqrt{u'-\frac{p}{6}}\mp\sqrt{u''-\frac{p}{6}}\mp\sqrt{u'''-\frac{p}{6}} ;$$

$$x'''=\mp\sqrt{u'-\frac{p}{6}}\pm\sqrt{u''-\frac{p}{6}}\mp\sqrt{u'''-\frac{p}{6}} ,$$

$$x^{IV}=\mp\sqrt{u'-\frac{p}{6}}\mp\sqrt{u''-\frac{p}{6}}\pm\sqrt{u'''-\frac{p}{6}} .$$

Le signe supérieur répond au cas de q négatif, et *vice versâ.*

32. *Solution graphique.* En considérant la proposée

$$x^4+px^2+qx+r=0\ ; \qquad (1)$$

comme le résultat de l'élimination de y, entre deux équations du second degré en x et y, on pourra trouver les racines de cette proposée par les intersections de deux sections coniques, dont l'une constante sera tracée, à l'avance, sur un carton, et l'autre variable dépendra de la valeur des coefficiens de la proposée. Comme la ligne droite et le cercle sont plus faciles à tracer que les autres sections coniques, il est naturel et avantageux de les choisir pour courbes variables.

1.° En faisant, dans la proposée; $x=lz$ (l étant une constante indéterminée), elle devient

$$l^4z^4+pl^2z^2+qlz+r=0\ . \qquad (2)$$

En faisant $l^2=p$ ou $l^2=-p$, suivant que p est positif ou négatif, on a

$$z^4\pm z^2+\frac{q}{p\sqrt{\pm p}}z+\frac{r}{p^2}=0\ ; \qquad (3)$$

qu'on peut remplacer par le système de ces deux-ci,

$$y=z^4\pm z^2\ , \qquad (4)$$

$$y+\frac{q}{p\sqrt{\pm p}}z+\frac{r}{p^2}=0\ . \qquad (5)$$

Ayant donc tracé sur un carton les deux courbes de l'équation (4) qui serviront, l'une pour le cas de p positif; l'autre pour celui de p négatif, si l'on construit la droite variable de l'équation (5), les abscisses des points d'intersections de cette droite et de la parabole du quatrième degré (4), seront les racines de l'équation (3), et par conséquent la relation $x=z\sqrt{p}$ donnera les racines de la proposée.

Cette première méthode a l'inconvénient que les points d'intersections pourront quelquefois tomber en dehors du carton.

2.° La proposée étant toujours

$$x^4+px^2+qx+r=0 \; ; \qquad (1)$$

je fais $x=lz$, et il vient la transformée

$$l^4z^4+pl^2z^2+qlz+r=0 \, ,$$

que j'écris d'abord ainsi

$$l^4z^4+(pl^2-l^4)z^2+l^4z^2+qlz+r=0 \, , \qquad (2)$$

et qu'on peut remplacer par le système de ces deux-ci

$$y=z^2 \, , \qquad (3)$$

$$l^4y^2+(pl^2-l^4)y+l^4z^2+qlz+r=0 \, , \qquad (4)$$

L'équation (3) représente une parabole du second degré, et l'équation (4) un cercle : en mettant celle-ci sous cette forme

$$\left(y+\frac{p-l^2}{2l^2}\right)^2+\left(z+\frac{q}{2l^3}\right)^2=\frac{(p-l^2)^2}{4l^4}+\frac{-q^2}{4l^6}-\frac{r}{l^4} \, , \qquad (4')$$

on reconnaît que le cercle qu'elle représente a pour abscisse de son centre $\alpha=-\frac{q}{2l^3}$, pour ordonnée de ce centre $\beta=\frac{l^2-p}{2l^2}$, et pour rayon

$$R=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\frac{r}{l^4}} \, .$$

Si donc on trace sur un carton (fig. 8) la parabole $y=z^2$, dans laquelle $AZ=1$, cette courbe servira à trouver les racines de

toute équation proposée du quatrième degré ; car, ayant décrit le cercle dont les coordonnées du centre sont α, $\mathcal{C}$, et le rayon R les abscisses des points d'intersections seront les racines de l'équation (4), et la relation $x=lz$ donnera les racines de la proposée (1).

Il faudra prendre pour l un nombre tel que α, $\mathcal{C}$, et les abscisses des points d'intersections ne tombent pas hors de la figure, ce qui sera toujours possible, en prenant l assez petit. Ordinairement, on pourra prendre pour l le plus grand coefficient de la proposée, pris positivement et augmenté de l'unité.

Remarque 1. S'il arrive que le cercle soit sensiblement tangent à la parabole, il y aura incertitude pour savoir si la proposée a deux racines égales ou deux imaginaires : dans ces cas rares, il faudra recourir à la méthode du chapitre III, ou bien, vérifier le doute par les formules du n.° 31, relatives aux conditions d'imaginarité : cette remarque s'applique aussi au troisième degré.

Remarque 2. On peut aussi trouver les racines de l'équation du troisième degré $x^3+px+q=0$, par la méthode du présent numéro ; car il suffit de faire $r=0$ dans les calculs précédens ; alors, l'une des quatre racines sera zéro et étrangère à la question ; les trois autres seront celles de la proposée.

Remarque 3. Les méthodes graphiques ont un grand avantage ; celui de faire distinguer d'un seul coup-d'œil les racines réelles, tant positives que négatives, et les racines imaginaires : je répète qu'elles sont plus expéditives que celles qui sont analitiques, à présent qu'on peut faire usage d'une courbe invariable, et que tout se réduit à placer une règle ou à faire tourner un compas. (Voyez mes *Opuscules*, pag. 111.)

33. *Racines égales.* Il sera utile de rapporter ici, comme nous l'avons fait pour le troisième degré, les formules relatives aux racines égales.

Soit la proposée

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ ;$$

je la délivre du second terme, pour simplifier les formules, en faisant $x=u-\frac{a}{4}$, et j'ai une transformée de cette forme $u^4+pu^2+qu+r=0$: elle aura deux racines égales u''', u^{IV}, et deux inégales u', u'', si on a la condition

$$4p^3(4pr-q^2)+9q^2(16pr-3q^2)+128r^2(2r-p^2)=0 ,$$

et l'on aura

$$u'''=u^{IV}=q.\frac{12r+p^2}{8pr-9q^2-2p^3} ;$$

$$u'=-u'''+\sqrt{-p-2u'''^2} ; \qquad u''=-u'''-\sqrt{-p-2u'''^2} :$$

u' et u'' ne seront réelles que dans le cas de p négatif et plus grand que $2u'''^2$.

Si la transformée a trois racines égales $u''=u'''=u^{IV}$ et une autre u' inégale, on le reconnaitra par la condition $p^2+12r=0$ qui exige pour la réalité des racines que r soit négatif, ensuite on aura

$$u''=u'''=u^{IV}=\pm\sqrt[2]{\frac{-p}{6}}=\pm\sqrt[4]{\frac{-r}{3}}=\sqrt[3]{\frac{q}{8}}$$

et $u'=-3u''$. Le signe supérieur a lieu quand q est positif, et *vice versâ*. Ces expressions des racines égales fournissent une condition plus simple que la précédente, savoir,

$$\sqrt[2]{\frac{-p}{6}}=\sqrt[4]{\frac{-r}{3}}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{q} .$$

Enfin, si $X=0$ avait deux couples ou deux racines doubles $x'=x''$ et $x'''=x^{IV}$, on le reconnaitrait de suite par la transformée en u, dans laquelle on aurait

$$q=0 ,$$

$$q=0\,,\ p^2=4r\,,\ u'=u''=+\sqrt{\frac{-p}{2}}\,,\ u'''=u^{\text{IV}}=-\sqrt{\frac{-p}{3}}\,.$$

L'équation en u, dans ce cas, devient $\left(u^2+\frac{p}{2}\right)^2=0$.

Les formules précédentes du quatrième degré s'obtiennent facilement en suivant la marche indiquée pour le troisième.

Cinquième degré.

34. *Construction graphique.* Le cinquième degré est susceptible d'une construction analogue à celle du n.° 32, relative au quatrième degré.

Soit la proposée,

$$x^5\pm px^3+qx^2+rx+s=0\ ;$$

en faisant $x=lz$, il vient

$$z^5\pm\frac{pz^3}{l^2}+\frac{qz^2}{l^3}+\frac{rz}{l^4}+\frac{s}{l^5}=0\ :$$

En faisant $l^2=\pm p$ et $l=\sqrt{\pm p}$, on a

$$z^5\pm z^3+\frac{qz^2}{p\sqrt{\pm p}}+\frac{rz}{p^2}+\frac{s}{p^2\sqrt{\pm p}}=0,$$

(le signe supérieur correspond à p positif).

Cette équation peut être remplacée par le système de ces deux-ci,

$$y=z^5\pm z^3\,, \qquad (1)$$

$$y+\frac{qz^2}{p\sqrt{\pm p}}+\frac{rz}{p^2}+\frac{s}{p^2\sqrt{\pm p}}=0, \qquad (2)$$

dont la première représente deux paraboles du cinquième degré (l'une pour le cas de p positif, et l'autre pour celui de p négatif), et la seconde une parabole du deuxième degré. La première est invariable et pourra être tracée sur un carton : elle sera double à cause du signe $\pm$: la parabole du deuxième degré est variable et dépend des coefficiens de la proposée : on a des instrumens pour la décrire par un mouvement continu. Si on met l'équation (2) sous cette forme

$$\left(z+\frac{r}{2q\sqrt{\pm p}}\right)^2=-\frac{p\sqrt{\pm p}}{q}\left(y+\frac{s}{p^2\sqrt{\pm p}}-\frac{r^2}{4p^2q\sqrt{\pm p}}\right), \qquad (2')$$

on reconnait que l'abscisse α du sommet de l'axe de la parabole, lequel est parallèle aux y, est

$$\alpha=-\frac{s}{p^2\sqrt{\pm p}}+\frac{r^2}{4p^2q\sqrt{\pm p}};$$

que l'ordonnée du même sommet est

$$6=-\frac{r^2}{2q\sqrt{\pm p}},$$

et que le paramètre est

$$-\frac{p\sqrt{\pm p}}{q}.$$

Il faut faire attention que l'axe de la parabole s'étend indéfiniment du côté des y positifs, si $\frac{p}{q}$ est négatif, et *vice versâ*.

Au moyen de ces expressions, il sera facile de tracer la parabole variable, dont les intersections donneront les différentes valeurs de z, lesquelles à leur tour feront connaître les racines de la proposée par la relation $x=\sqrt{\mp p}.z$.

CHAPITRE V.

MÉTHODES MÉCANIQUES POUR TROUVER LES RACINES.

Les moyens mécaniques de trouver les racines ne doivent pas être considérés simplement comme des récréations mathématiques : ils offrent encore, s'ils sont bien conçus, un procédé expéditif pour avoir une première approximation des racines, du moins dans le plus grand nombre des cas.

On trouve, dans l'*Encyclopédie méthodique*, au mot équation, la description d'un constructeur universel des équations déterminées. Cet instrument, qui n'y est appliqué qu'aux équations du second degré, est déjà très-compliqué : il est aisé de voir que, pour les degrés supérieurs, la complication augmenterait au point de le rendre impraticable.

On trouve encore, dans le 17.me cahier du *Journal de l'école polytechnique*, une méthode fondée sur la considération des développantes du cercle, laquelle ne saurait remplir le but que l'on doit se proposer, l'économie du temps : d'ailleurs sa théorie est trop abstraite pour être à la portée du plus grand nombre des lecteurs.

J'ai décris, dans mes *Opuscules*, pag. 152, un nouvel instrument que j'ai appelé *balance algébrique*, et qui a paru, à plusieurs savans géomètres, réunir les qualités désirables, la simplicité et une précision suffisantes : je le rapporte ici avec quelques additions.

Enfin, je termine ce chapitre par l'exposition de deux nouveaux moyens qui ont l'avantage de n'exiger que quelques cartons que chacun peut tracer sans frais.

35. *Balance algébrique.* Soit

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+etc.=0\ ; \qquad (1)$$

l'équation proposée, dont je suppose les coefficiens numériques.

Je pose les équations

$$x=y' \ , \ x^2=y'' \ , \ x^3=y''' \ , \ x^4=y^{\text{IV}} \ , \ x^5=y^{\text{V}} \ , \ etc.\ ;$$

la proposée devient

$$a+by'+cy''+dy'''+ey^{\text{IV}}+fy^{\text{V}}+etc.=0\ . \qquad (2)$$

Supposons maintenant qu'ayant pris (fig. 9) $BD=Bd=1$, et ayant élevé la perpendiculaire $BA=1$, on mène les lignes AD, Ad, et qu'on construise de part et d'autre de AB les paraboles $AM''D$, $AM'''D$, $AM^{\text{IV}}D$.........$Am''d$, $Am'''d$, $Am^{\text{IV}}d$........, *etc.*, représentées par les équations $x^2=y''$, $x^3=y'''$, *etc.*, en prenant $AP=x$, $PM''=y''$, $PM'''=y'''$, $PM^{\text{IV}}=y^{\text{IV}}$.

Supposons ensuite que, dans l'équation (1), qui aura des termes négatifs, si elle a des racines réelles et positives, on ait transposé dans le second membre ces termes négatifs.

Supposons enfin qu'on ait placé dans les points Q, m', m'', m''', m^{IV}, et M^{IV}, M''', M'', M', *etc.*, des poids proportionnels aux coefficiens a, b, c, d, *etc.* : alors il est évident que si AB est un axe horizontal, il y aura équilibre autour de cet axe, entre les poids qui sont à gauche et ceux qui sont à droite, quand $AP=x$ sera une racine de la proposée.

Par exemple, si la proposée est

$$2+3x-4x^2+8x^3+9x^4=0\ ; \qquad (1')$$

je l'écris ainsi

$$2+3y'-4y''+8y'''+9y^{\text{IV}}=0\ ,$$

ou

$$2+3y'+8y'''+9y^{\text{IV}}=4y''\ . \qquad (2')$$

Je pose en Q un poids $=2$, en m' un poids $=3$, en m''' un

poids $=8$, en m^{IV} un poids $=9$, et en M'' un poids $=4$: il est aisé de sentir que la somme des momens des poids devant être égale de part et d'autre de l'axe AB, il y aura équilibre quand $AP=x$ sera une racine réelle positive de la proposée.

Imaginons maintenant qu'au moyen d'un mécanisme quelconque, une règle $M'm'$ fasse mouvoir les poids chacun sur la ligne droite ou courbe qui lui appartient (à l'exception du poids Q qui doit rester à la même place), l'équilibre aura lieu chaque fois que AP sera une racine positive.

36. *Remarques.* La description théorique qui précède a besoin de quelques développemens, tant pour la construction de l'instrument que pour son usage.

1.° Ce qui précède suppose que toutes les racines sont positives : il faudra donc, après avoir trouvé les positives, changer les signes des termes affectés des puissances impaires de x, et recommencer l'opération pour avoir les racines positives de la transformée, qui seront les négatives de la proposée.

2.° On a supposé encore que toutes les racines étaient comprises entre zéro et un : il faudra donc préparer la proposée, en y faisant $x=Lz$, L étant la limite supérieure positive de la proposée. (Voy. le n.° 18.) Ayant trouvé les racines de la transformée en z, on aura celles de la proposée par la relation $x=Lz$.

3.° Ce qui précède suffit pour la théorie, mais non pour la pratique. Les paraboles sont des fentes dans lesquelles doivent glisser des fils métalliques, dont chacun porte un petit vase destiné à recevoir les poids : ceux de ces vases qui correspondent aux termes de l'équation proposée, contiennent des poids proportionnels aux coefficiens ; les autres vases sont vides : tous ces fils sont mis en mouvemens par une règle $M'm'$, percée d'une rainure, et garnie d'un vernier qui parcourt la ligne AB.

On sent que les fentes paraboliques ne sauraient être prolongées jusqu'aux points A, D, d, où elles se confondraient : il est donc nécessaire d'éloigner de ces points les racines de l'équation. Pour

cela, on remarquera que L étant la limite supérieure positive de la proposée, si on y met Lz pour x, toutes les racines positives de la transformée seront comprises entre o et $+1$; que si, dans l'équation en z, on met $\frac{10}{4}z$ ou $\frac{5}{2}z$ pour z, les racines positives de cette seconde transformée seront toutes comprises entre o et 0,4; qu'enfin, si, dans cette seconde transformée, on met $z-0,5$ pour z, on aura une troisième transformee dont les racines positives seront comprises entre 0,5 et 0,9.

Il suit de là qu'en mettant dans la proposée $\frac{5L}{2}(z-0,5)$ pour x, on aura, d'un seul coup, une transformée en z, dont toutes les racines positives seront comprises entre 0,5 et 0,9, et tomberont par conséquent assez loin des points A, D, d, où les courbes se confondent.

Cette préparation préalable a un autre avantage, c'est que près du point A les racines ne sauraient être déterminées avec le même degré d'approximation, que loin de ce point.

Quant aux dimensions de l'instrument, si le plan $EFfe$, qui a la forme d'un trapèze, est en bois, on fera $AB=50$ centimètres; d'où $Ff=90$, $Ee=50$, $HI=20$; mais si l'instrument est en cuivre il suffira de faire $AB=25$, ce qui reduira à la moitié les autres dimensions.

Le trapèze $EFfe$ porte deux tourrillons en H et I qui tournent dans deux crapaudines que portent deux montans verticaux.

4.° Lorsque la règle mobile $M'm'$ approche d'une racine, les deux bras de la balance approchent aussi de l'équilibre : au-delà de la racine, le bras qui etait le plus pesant devient le plus léger : il n'en est pas ordinairement de même si la règle rencontre deux imaginaires; le bras qui était d'abord le plus pesant, perd, jusqu'à un certain point, une portion de sa prépondérance, puis, passe ce point, la reprend par degré.

Si la règle rencontre deux racines égales, le bras qui avait la prépondérance, la perd peu à peu, jusqu'au moment de l'équilibre, puis la reprend par degrés insensibles.

Par ces caractères, on pourra presque toujours distinguer les racines imaginaires et les racines égales; mais, il est un cas où l'instrument ne sera pas assez sensible, et où il faudra recourir aux méthodes des chapitres III et VI; c'est celui où l'axe de la courbe $X=y$ (fig. 3, 4, 5) s'approche très-près d'un sommet: alors on pourra confondre deux racines réelles inégales et très-voisines, avec deux racines égales, ou avec deux racines imaginaires.

Enfin, si la courbe $X=y$ a des ordonnées *minima* ou de sommet convexe imaginaire, ce qui arrive quand la première dérivée de $X=0$ a des racines imaginaires; alors le même bras conserve sa prépondérance avant et après la rencontre de l'ordonnée *minima* imaginaire, et l'instrument ne manifeste point l'existence des racines imaginaires. (La figure 6 offre un exemple de ce cas.)

5.° Le plan de l'instrument pourrait être vertical, et alors l'état d'équilibre serait indiqué par un fil à plomb suspendu en I, qui coïnciderait avec IH.

37. *Exemple.* Soit proposé

$$x^4+x^3-x^2-2x-2=0 \text{ . (*)}$$

La limite supérieure positive L de cette équation serait 3, d'après la règle du n.° 18; mais, comme il est important de la diminuer, je fais $L=2$, et je vérifie ce nombre 2 en mettant $2-x$ pour x, car, la transformée n'ayant plus que des variations, m'apprend que toutes ses racines sont positives.

Je fais donc, conformément à la remarque 3.° du numéro précédent,

$$x=5(z-0,5) \text{ ,}$$

et il vient la transformée

(*) Ou $(x^2-2)(x^2+x+1)=0$.

$$625z^4-1125z^3+725z^2-203,75z+20,1875=0\ ,$$

ou simplement

$$625z^4-1125z^3+725z^2-204z+20=0\ ,$$

ou encore

$$62,5z^4-112,5z^3+72,5z^2-20,4z+2=0\ ;$$

Soumettant cette équation à l'épreuve de la balance, on trouve que l'équilibre a lieu en un seul point, celui où l'index de la règle mobile marque 0,78 : donc $z=0,78$ et $x=1,4$. Au-delà de ce point, celui des deux bras de la balance qui avait la prépondérance, la perd et ne la reprend plus ; d'où l'on conclut que la derivée de $X=y$ a deux racines imaginaires.

Il reste à trouver les racines négatives de la proposée : pour cela, je change $+x$ en $-x$, et elle devient

$$x^4-x^3-x^2+2x-2=0\ ;$$

L vaut encore ici 2, et je fais

$$x=5(z-0,5)\ ;$$

il vient la transformée

$$625z^4-1375z^3+1100z^2-371,25z+41,4375=0\ ,$$

ou simplement (pour se borner à des poids représentés par 3 chiffres)

$$62,5z^4-137z^3+110z^2-37,1z+4,1=0\ .$$

Soumettant cette équation à la balance, on trouve que l'équilibre n'a lieu que dans un point, celui où l'index marque 0,78 : donc $z=0,78$, et x ou la racine négative $=-1,4$: donc aussi la proposée a deux racines imaginaires.

38.

38. *Autre système de balance.* *BbeE* (fig. 10) est un rectangle dans lequel $Bb=2=50$ centimètres est divisé en 200 parties égales numérotées de part et d'autre du milieu o ; la parallèle *Cc* est divisée depuis le milieu vers *C* et *c*, en faisant dans $y=x^2$ successivement $x=0,1$, $x=0,2$.......: les valeurs de y donnent les distances respectives de chaque point à la ligne oo du milieu.

La parallèle *Dd* a été divisée de même d'après l'équation $y=x^3$, en faisant $x=0,1$, $x=0,2$.......

La parallèle *Ee* a été divisée aussi d'après l'équation $y=x^4$.

Il faut imaginer d'autres parallèles *Ff*, *Gg*....... divisées d'après les équations $y=x^5$, $y=x^6$,.......

Les points correspondans de toutes les parallèles sont joints par des courbes 10—10 , 20—20 , 30—30 , etc.

Toutes les parallèles sont des fentes dans lesquelles se meuvent les fils qui portent les poids : ces fils doivent être tous placés sur la même courbe , ce qui ne peut s'exécuter qu'à la main : on les fait glisser d'une courbe à la suivante , jusqu'à ce qu'on ait trouvé l'équilibre autour de l'axe horizontal oo qui repose sur deux montans verticaux : si alors les fils sont sur la courbe 30, la racine indiquée est $x=0,30$; et ainsi des autres cas.

Par ce système de balance , on évite l'inconvénient du premier où les fentes se confondent près des points *A*, *D*, *d*. (fig. 9.)

Il reste à préparer l'équation proposée pour que toutes les racines tombent entre o et $+1$, en faisant $x=Lz$. (L étant la limite supérieure positive de la proposée.) Pour avoir les racines négatives, on change $+x$ et $-x$, et l'on recommence l'opération.

Comme les courbes voisines de l'axe donnent peu d'approximation ; il est plus avantageux de faire

$$x=2L(z-0,5)=L(2z-1) ,$$

afin que les racines de la transformée en z tombent entre $\frac{1}{2}$ et $+1$: on trouve ensuite les négatives en changeant préalablement $+x$ en $-x$.

Enfin, si l'on voulait avoir, par une seule opération, toutes les racines tant positives que négatives, en appelant L' la limite supérieure négative de la proposée, on ferait

$$x = L - 2(L+L')(z-0,5) = 2L + L' - 2(L+L')z .$$

Toutes les racines de la transformée en z seraient positives et comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1 ; mais, ce second moyen a l'inconvénient de fournir des coefficiens trop gros et qui diminuent l'exactitude des résultats.

Je remarquerai encore qu'au lieu des poids variables, on pourrait employer des poids constans ; mais l'instrument deviendrait plus compliqué et moins exact.

39. *Triangles algébriques*. On peut, au moyen de quelques cartons que chacun peut construire sans frais, remplir le même objet que par la balance précédente.

$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, *etc.* (fig. 11, 12, 13, etc.) sont des triangles rectangles isocèles en carton, dont les côtés A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3...., sont divisés en 100 ou 1000 parties égales : les autres côtés B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 ...., égaux à l'unité, sont divisés de manière que les distances de chaque point au point B sont les ordonnées des courbes

$$y = x , \quad y = x^2 , \quad y = x^3 ....,$$

en faisant successivement

$$x = 0,1 , \quad x = 0,2 , \quad x = 0,3 .$$

Enfin, des points A_1, A_2, A_3 etc., on a mené des droites à tous les points dedivision de B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 ....

Voici un exemple qui suffira pour faire comprendre l'usage de ces cartons. Je prends l'exemple du n.° 37,

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0 .$$

Je fais $x=2L(z-\frac{1}{2})$ afin que toutes les racines positives soient comprises entre $\frac{1}{2}$ et $+1$. On a ici $L=2$, et la transformée est

$$128z^4-224z^3+136z^2-36z+3=0 \text{ ,}$$

ou en divisant par le plus grand coefficient 224, et transposant

$$0{,}571z^4+0{,}607z^2+0{,}013=z^3+0{,}161z \text{ .}$$

Je prends (fig. 11, 12, 13, 14)

$$A_1H_1=0{,}161 \text{ , } A_2H_2=0{,}607 \text{ , } A_3H_3=1=A_3B_3 \text{ ; } A_4H_4=0{,}571 \text{ ;}$$

je pose la ligne IH_2 sur IH_4: je pose de même la ligne IB_3 du carton fig. 13 sur la ligne IH_1 : je fais glisser le carton fig. 14 sur le carton fig. 12, et le carton fig. 13 sur celui de la fig. 11, jusqu'à ce que $IH_4+IH_2+0{,}013$ donne la même longueur que IH_1+IB_3, les points I étant tous pris sur les transversales de même numéro : je trouve que l'égalité a lieu pour les transversales du n.° 85; d'où je conclus que $z=0{,}85$, et par conséquent $x=1{,}4$, (à cause de $x=2(2z-1)$).

Cela est fondé sur ce que la ligne B_185, valant z, la ligne IH_1 vaut $0{,}161z$: de même

$$B_385=z^3 \text{ , } IH_2=0{,}607z^2 \text{ , } IH_4=0{,}571z^4 \text{ .}$$

Au reste, on sent que le degré d'exactitude sera d'autant plus grand que les cartons seront eux-mêmes plus grands, et que le plus petit nombre de l'équation approchera plus de l'unité.

On sent encore que ce que nous avons dit précédemment des racines négatives, égales et imaginaires s'applique à la méthode du présent numéro.

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION DU NOMBRE DES RACINES IMAGINAIRES D'UNE ÉQUATION D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

Le problème qui fait l'objet de ce chapitre est très-important : malgré une longue suite d'efforts, on n'en a que des solutions ou incomplètes, ou impraticables. (Voyez le n.° 13.) La suivante paraît devoir terminer heureusement cette branche de l'analise.

40. Il suit de la sixième remarque du n.° 15, que les y *minima* ont une corrélation nécessaire avec le nombre des racines imaginaires, et que, par conséquent, l'équation qui donnerait toutes les valeurs de y *maxima* ou *minima*, ferait connaître, par la succession de ses signes, les racines imaginaires, en discutant, pour chaque degré, les différens cas qu'il présente.

Cette équation en y, que je représente par $Y=0$, et que j'appellerai équation des sommets ou équation des racines imaginaires, est facile à former ; en effet, on a, pour caractériser les sommets, l'équation $X'=\frac{dy}{dx}=0$: il suffit donc, pour avoir $Y=0$, d'éliminer x entre $X'=0$ et $X=y$: l'équation résultante en y sera du degré $m-1$.

Voyons maintenant comment l'équation $Y=0$ peut faire connaître les racines imaginaires : un coup-d'œil sur les figures 2, 3, 4, 5 suffira. Nous conviendrons d'appeler positif l'espace qui est en dessus de l'axe des x, et négatif celui qui est en dessous.

Dans la figure 2, relative au deuxième degré, $Y=o$ sera du premier degré et de la forme $y+A=o$. Dans le cas de deux racines imaginaires, A sera négatif ou y positif, ou bien encore $y+A=Y=o$ n'aura que des variations de signe, d'après la règle de *Descartes*.

Pour le troisième degré (fig. 3), $Y=o$ sera de la forme

$$y^2+Ay+B=o\ ;$$

dans le cas de deux racines imaginaires, l'axe des x aura une des deux positions O_1 ou O_5 et ne rencontrera la courbe qu'en un point: les deux valeurs de y seront ou toutes deux positives, ou toutes deux négatives; c'est-à-dire que $Y=o$ aura ou deux variations, ou zéro variation.

Ces deux exemples suffisent pour faire voir comment il faut discuter les degrés plus élevés, et comment les signes de l'équation $Y=o$ dépendent de la position de l'axe des x, laquelle, à son tour, détermine le nombre des imaginaires. Un examen attentif m'a fait apercevoir la loi de cette relation qu'on peut exprimer par le théorème suivant.

Théorème sur les racines imaginaires.

41. $X=o$ étant une équation du degré m, et $X'=o$ sa dérivée du premier ordre, si on élimine x entre $X=y$ et $X'=o$, on aura, en y, une équation $Y=o$ du degré $m-1$, dont les racines y', y'', y'''....... sont les ordonnées *maxima* et *minima* de la courbe $X=y$: cela posé, on aura, entre les signes de l'auxiliaire $Y=o$, et les racines imaginaires de la proposée $X=o$, la correspondance que voici :

1.° m étant pair, $X=o$ n'ayant pas de racines égales, aura o, 2, 4, 6, ... m, racines imaginaires, suivant que $Y=o$, aura

$$\frac{m}{2}, \quad \frac{m}{2} \pm 1; \quad \frac{m}{2} \pm 2, \quad \frac{m}{2} \pm 3 \ldots\ldots 0;$$

permanences de signe.

2.° m étant impair, $X=0$ n'ayant pas de racines égales, aura $0, 2, 4, 6 \ldots\ldots\ldots m-1$, racines imaginaires, suivant que $Y=0$ aura

$$\frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-1}{2} \pm 1, \quad \frac{m-1}{2} \pm 2, \quad \frac{m-1}{2} \pm 3 \ldots\ldots \frac{m-1}{2} \pm \frac{m-1}{2};$$

permanences.

3.° $Y=0$ aura 1, 2, 3, etc., termes nuls, à commencer par celui qui est constant, suivant que $X=0$ aura une racine double, deux doubles ou une triple, trois doubles ou une quadruple, etc.

Ce théorème renferme une solution aussi simple que complète du problème des racines imaginaires : il réduit la difficulté à celle de trouver les racines égales ; puisque la même équation $Y=0$ donne, à la fois, les unes et les autres : nous osons croire que sa découverte est un grand pas en algèbre : nous verrons plus bas qu'il conduit encore à la solution d'un autre problème du même genre, celui de distinguer les racines positives des négatives ; enfin, il est d'une application facile, et les formules qu'on en déduit peuvent trouver place dans les livres élémentaires. La table suivante, qu'il serait facile de prolonger, présente, pour les dix premiers degrés, la marche de la loi exprimée par le théorème.

Table des racines imaginaires de $X=0$,

Correspondantes aux permanences de $Y=0$.

Degré de $X=0$	Imagin.es de $X=0$	Permanences de $Y=0$
2	0 2	1 0
3	0 2	1 0 ou 2
4	0 2 4	2 1 ou 3 0
5	0 2 4	2 1 ou 3 0 ou 4
6	0 2 4 6	3 2 ou 4 1 ou 5 0
7	0 2 4 6	3 2 ou 4 1 ou 5 0 ou 6

Degré de $X=0$	Imagin.es de $X=0$	Permanences de $Y=0$
8	0 2 4 6 8	4 3 ou 5 2 ou 6 1 ou 7 0
9	0 2 4 6 8	4 3 ou 5 2 ou 6 1 ou 7 0 ou 8
10	0 2 4 6 8 10	5 4 ou 6 3 ou 7 2 ou 8 1 ou 9 0

L'usage de cette table est simple : si, par exemple, la proposée $X=0$ est du huitième degré, on voit, par la table, qu'elle aura six imaginaires si $Y=0$ a une permanence ou sept permanences.

C'est le moment de prévenir une objection. Le théorème précédent est d'une évidence manifeste lorsque la courbe $X=y$ a toutes ses branches ; mais, il peut arriver qu'elle en perde quelques-unes, et même que $Y=0$ n'ait que des racines imaginaires : dans ce cas, le théorème ne sera-t-il pas en défaut ? l'expérience prouve que non. Il faut faire attention que, dans notre méthode, ce ne sont pas les valeurs absolues des y *minima* ou *maxima* qu'on emploie ; mais seulement les rapports numériques du nombre des y *maxima* aux y *minima* ; c'est-à-dire, les positions respectives de ces deux espèces d'ordonnées de signe contraire : or, on peut bien comparer des quantités imaginaires sous le point de vue de leur position, sans connaître leur grandeur absolue ; c'est pour cela que la loi qui lie les signes de $Y=0$ aux racines imaginaires de $X=0$, ne cesse pas d'avoir lieu quand $Y=0$ a des imaginaires. Au reste, c'est ici un fait d'analise qu'il serait sans doute difficile, mais non impossible, de démontrer par le calcul.

Règles déduites du théorème pour les six premiers degrés.

42. Quoique la formation de l'auxiliaire $Y=0$ soit facile, il est encore plus commode pour la pratique d'effectuer les calculs sur les équations littérales des premiers degrés, afin d'en déduire des formules qui dispensent de former l'équation $Y=0$ pour chaque équation numérique proposée. Passé le sixième degré, les éliminations en lettres deviennent trop compliquées, et d'ailleurs les substitutions à faire dans des formules littérales seraint plus longues que l'élimination elle-même entre deux équations numériques.

2.me *Degré.* Soit la proposée

$$x^2+ax+b=0=X\ :$$

on a

$$X'=2x+a=0\ .$$

éliminant x entre $X'=0$ et $X=y$, on trouve, pour $Y=0$, celle-ci

$$4y+a^2-4b=0\ ;$$

donc, d'après la table, la proposée aura deux racines imaginaires si $4y+a^2-4b=0$ n'a point de permanences; c'est-à-dire, si a^2-4b est négatif, ou bien si $4b>a^2$, ce que l'on savait.

43. 3.me *Degré*. Soit la proposée

$$X=x^3+ax^2+bx+c=0\ .$$

On a

$$X'=3x^2+2ax+b\ .$$

Éliminant x entre $X'=0$ et $X=y$, on trouve, pour $Y=0$, celle-ci

$$27y^2+2(9ab-2a^3-27c)y+27c^2+2ac(2a^2-9b)+b^2(4b-a^2)=0=Y.$$

Donc, d'après la table, la proposée $X=0$ aura deux racines imaginaires, si l'auxiliaire $Y=0$ a zéro ou deux permanences. Comme dans ces deux cas le terme constant doit être positif, il s'ensuit que la condition de deux racines imaginaires est que la quantité

$$27c^2+2ac(2a^2-9b)+b^2(4b-a^2)$$

soit positive.

44. 4.me *Degré*. Soit la proposée

$$X=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ :$$

on a

$$X'=4x^3+3ax^2+2bx+c=0\ ;$$

Pour éliminer x entre $X'=0$ et $X=y$, je mets deux fois de suite dans $X=y$ la valeur de x^3, tirée de $X'=0$, ce qui donne l'équation (1) ci-après : en combinant (1) avec $X'=0$, on a l'équation (2)

$$(3a^2-8b)x^2+(2ab-12c)x+ac-16d+16y=0 \qquad (1)$$

$$(9a^3-32ab+48c)x^2+(6a^2b-16b^2-4ac+64d)x+c(3a^2-8b)-64xy=0. \qquad (2)$$

Celles-ci étant traitées à la manière ordinaire, on trouve, pour $Y=0$, en posant

$$A=-192ac-128b^2+144a^2b-27a^4 ;$$

$$B=2(-3a^2c^2+9a^3bc-40ab^2c+72bc^2-2a^2b^3+8b^4) ;$$

$$C=c^2(-4a^3c+18abc+a^2b^2-27c^2-4b^3) ,$$

celle-ci

$$256y^3-(768d+A)y^2+(768d^2+2Ad+B)y-256d^3-Ad^2-Bd-C=0. \qquad (Y)$$

Maintenant, d'après la table du n.° 41, la proposée $X=0$, aura deux racines imaginaires si $Y=0$ a une ou trois permanences : la proposée aura quatre imaginaires si $Y=0$ a zéro permanence, c'est-à-dire, trois variations.

Ces conditions peuvent être énoncées comme il suit.

En écrivant, pour abréger $Y=0$, de cette manière,

$$y^3+A'y^2+B'y+C'=0 ,$$

on remarquera que tous les cas d'une ou trois permanences qui donnent deux imaginaires, sont compris dans les combinaisons suivantes,

$$y^3+y^2+y+1=0 , \quad y^3+y^2-y+1=0 ,$$

$$y^3-y^2+y+1=0 , \quad y^3-y^2-y+1=0 ,$$

dans lesquelles le dernier terme demeure seul constamment positif : donc, la proposée $X=0$ aura deux racines imaginaires si C' est positif.

A l'égard du cas de quatre racines imaginaires, lequel est unique, il est évident que les conditions sont

$$A'<0\ ,\quad B'>0\ ,\quad C'<0\ .$$

Les formules de cet article deviennent bien plus simples quand la proposée n'a pas de deuxième terme.

45. 5.me *Degré*. Soit la proposée

$$X=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\ ;$$

on a

$$X'=5x^4+4ax^3+3bx^2+2cx+d=0\ :$$

pour éliminer x entre $X'=0$ et $X=y$, je mets deux fois de suite, dans $X=y$, la valeur de x^4 tirée de $X'=0$, et il vient

$$(10b-4a^2)x^3+(15c-3ab)x^2+(20d-2ac)x25(e-y)-ad=0\ . \quad (1)$$

Combinant celle-ci avec $X'=0$, on a

$$(16a^3-55ab+75c)x^3+(12a^2b-10ac-30b^2+10d)x^2$$

$$+(8a^2c-5ad-20bc+125e-125y)x-d(10b-4a^2)=0\ . \quad (2)$$

Je continue sur (1) et (2) l'élimination suivant la méthode de *Bezout* : c'est la meilleure que je connaisse, la seule qui n'introduise pas de racines étrangères : celle qui est fondée sur le plus grand commun diviseur, n'est pas exempte de ce défaut : il est vrai qu'on a cherché à l'en délivrer ; mais pourquoi combattre des difficultés qu'on peut éviter ?

Ayant écrit (1) et (2) comme il suit,

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0\ ,\ A'x^3+B'x^2+C'x+D=0\ ;$$

et ayant posé

$$A'B-AB'=E\ ,\quad A'C-AC'=F\ ,\quad A'D-AD'=G\ ;$$

$$B'D-BD'=H\ ,\quad C'D-CD'=I\ ,\quad B'C-BC'=K\ ,$$

on aura, pour l'équation $Y=0$, celle-ci

$$G(G^2+EI+GK-2FH)+I(F^2-EK)+EH^2=0\ . \qquad (Y)$$

46. 6.me *Degré.* Soit la proposée

$$X=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0\ ;$$

on a

$$X'=6x^5+5ax^4+4bx^3+3cx^2+2dx+e=0\ .$$

Pour éliminer x entre $X'=0$ et $X=y$, je mets deux fois de suite dans $X=y$ la valeur de x^5, tirée de $X'=0$, et j'ai

$$(12b-5a^2)x^4+(18c-4ab)x^3+(24d-3ac)x^2+(30e-2ad)+x36(f-y)-ae=0\ . \qquad (1)$$

Combinant la dernière avec $X'=0$, on a celle-ci

$$(25a^3-84ab+108c)x^4+(20a^2b-18ac-48b^2+144d)x^3$$

$$+(180e-12ad-36bc+15a^2c)x^2+(216f216y-6ae-24bd+$$

$$+10a^2d)x+e(5a^2-12b)=0\ . \qquad (2)$$

J'élimine x entre (1) et (2), suivant la méthode de *Bezout*; je les écris d'abord comme il suit :

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0\,,$$

$$A'x^4+B'x^3+C'x^2+D'x+E'=0\,;$$

puis faisant pour abréger

$$A'B-AB'=a_1\,,\quad A'C-AC'=b_1\,;\quad A'D-AD'=c_1\,;$$

$$A'E-AE'=d_1\,,\quad B'C-BC'+A'D-AD'=e_1\,,$$

$$A'E-AE'+B'D-BD'=f_1\,,\quad B'E-BE'=g_1\,,$$

$$B'E-BE'+C'D-CD'=h_1\,,\quad C'E-CE'=i_1\,,$$

$$D'E-DE'=k_1\,,$$

on trouve

$$d_1(-d_1e_1h_1+2b_1g_1h_1-2b_1f_1i_1+d_1f_1^2-2c_1f_1g_1+2c_1e_1i_1)+g_1$$

$$(-a_1g_1h_1+2a_1f_1i_1-2b_1c_1i_1+c_1^2g_1)+i_1(-a_1e_1i_1+b_1^2i_1)$$

$$+k_1(a_1e_1h_1-b_1^2h_1+2b_1c_1f_1-a_1f_1^2-c_1^2e_1)=0=Y\,.$$

47. On voit, par ce qui précède, que la formation de $Y=0$, n'exigera jamais que l'élimination de x entre deux équations du degré $m-2$. Il est même possible d'abaisser d'un degré ces deux équations.

Soit, en effet, la proposée

$$X=x^7+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0\,,$$

qu'on a délivré de son deuxième terme. On formera sa réciproque en faisant $x=\frac{1}{u}$, laquelle aura le même nombre de racines imaginaires : elle sera

$$fu^7+eu^6+du^5+cu^4+bu^3+au^2+1=0=U\ ;$$

sa dérivée sera

$$7fu^6+6eu^5+5du^4+4cu^3+3bu^2+2au=0=U'\ .$$

Pour éliminer u entre $U'=0$ et $U=y$, on remarquera que $U'=0$ donne $u=0$, d'où $y=1$: ainsi, $y-1$ est un des facteurs de $Y=0$: par là $U'=0$ est abaissée d'un degré, et l'élimination de u ne donnera plus, pour $Y=0$, qu'une équation du cinquième degré, ou du degré $m-2$; laquelle étant multipliée par le facteur $y-1$, sera l'équation cherchée en y.

48. Il est bon de remarquer que si $X=0$ a des racines égales, on s'en apercevra en ce que un ou plusieurs termes de $Y=0$ seront nuls, ce qui abaissera cette équation, et l'on déterminera, d'après la table du n.° 41, le nombre des racines imaginaires qu'indique cette équation abaissée : ainsi, la circonstance des racines égales dans la proposée n'apporte aucun changement dans l'emploi de notre méthode ; tandis qu'elle est un grand obstacle dans celle de M. *Cauchy*, comme on le verra.

Nous terminerons ce chapitre par deux applications numériques.

Soit proposée

$$x^4+3x^3+3x^2+3x+2=0\ ;$$

on trouve que le dernier terme C' de $Y=0$ du n.° 44, relatif au quatrième degré, est positif ; d'où l'on conclut, tout de suite, que la proposée a deux racines imaginaires : en effet, elle est le produit de

$$(x+2)(x+1)(x^2+1)=0\ .$$

Soit encore proposé

$$x^6-x^4+2x^3+1=0\ ;$$

on a

$$X'=6x^5-4x^3+6x^2=0\ ;$$

ici $X'=0$ a deux racines $x=0$, $x=0$, qui, étant mises dans $X=y$, donnent les deux facteurs $y-1=0$, $y-1=0$: il reste donc à éliminer x entre $X=y$ et $3x^3-2x+3=0$: cette élimination donne

$$27y^3+8.27y^2-956y+713=0\ ,$$

qui, étant multipliée par $(y-1)^2$, devient

$$(y-1)^2(27y^3+8.27y^2-956y+713)=0\ ;$$

c'est l'équation cherchée $Y=0$. Sans qu'il soit besoin d'exécuter la multiplication, on voit qu'elle n'a qu'une permanence, et la table du n.° 41 (case du 6.me degré) fait connaître que la proposée a quatre racines imaginaires : en effet, elle est le produit de

$$(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)=0\ .$$

CHAPITRE VII.

DISTINCTION DES RACINES RÉELLES EN POSITIVES ET NÉGATIVES.

49. Ce chapitre est presque aussi important que le chapitre VI, dont il est le complément. Après avoir déterminé le nombre des racines imaginaires, par le chapitre VI, on connait, par une simple soustraction, celui des racines réelles; mais il reste à distinguer celles-ci en positives et négatives.

Il faut d'abord remarquer qu'un facteur imaginaire du deuxième degré, étant toujours de l'une de ces deux formes

$$x^2+2\alpha x+\alpha^2+6^2\ ,\quad x^2-2\alpha x+\alpha^2+6^2\ ,$$

sa multiplication, par un polynôme réel y, ne peut introduire, dans le polynôme résultant X, que deux permanences ou deux variations de plus que n'en contenait le polynôme y; mais jamais une variation et une permanence.

Ce lemme, combiné avec la règle de *Descartes*, suffit pour assigner le nombre des racines positives et celui des négatives, dans beaucoup de cas pour tous les degrés, et dans tous les cas pour les sept premiers degrés, hors un seul pour lequel le doute est levé par une règle très-simple, déduite d'un théorème ci-après.

Après avoir exposé ce théorème, je donnerai les règles relatives aux sept premiers degrés, et, pour compléter la matière, j'exposerai ensuite une méthode générale, à laquelle on pourra recourir, dans les

les cas douteux des degrés supérieurs, au septième, qui échappent à la première méthode.

Théorème nouveau sur les signes des racines réelles.

50. Lorsque dans une équation

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots\ldots = 0 ;$$

on connait le nombre des racines imaginaires; s'il arrive que par la règle de *Descartes* on ne puisse discerner complètement le nombre des racines réelles positives et celui des négatives, en sorte qu'il en reste deux douteuses et de même signe ; alors on pourra affirmer que ces racines douteuses sont toutes deux positives, si la quantité

$$(m-1)^2a^2 - m(3m-4)ab + 3m^2c \ldots\ldots\ldots (F)$$

est négative, et, au contraire, qu'elles sont toutes deux négatives si cette quantité (F) est positive.

Avant de démontrer ce théorème, il faut voir dans quels cas il trouve son application. On démontre facilement qu'une équation $X=0$, qui a tous ses termes, fournit un nombre 2^m de combinaisons de ses signes, le premier demeurant positif : ainsi, par exemple, le deuxième degré fournit les quatre combinaisons

$$x^2+ax+b=0,\ x^2-ax-b=0,\ x^2+ax-b=0,\ x^2-ax+b=0.$$

Il semblerait, d'après cela, qu'en formant une table des combinaisons de chaque degré, chaque équation proposée devrait y trouver sa place : la conclusion serait vraie sans la circonstance des racines imaginaires qui introduisent des cas douteux, à partir du quatrième degré.

Soit proposé, par exemple,

$$x^4+x^3-5x^2-7x+10=0 ,$$

et

$$x^4+3x^3-2x^2-2x+12=0 ,$$

dans lesquelles on a reconnu, par le chapitre VI, deux racines imaginaires : ces deux équations ont chacune deux variations et deux permanences : on est assuré, par le lemme du n.° 49 et par le signe du terme connu, que dans chacune les deux racines réelles sont de même signe : il s'agit de distinguer ce signe qui n'est pas le même pour toutes deux : en effet, la première vient de

$$(x-1)(x-2)(x^2+4x+5)=0 ,$$

et la deuxième de

$$(x+2)(x+3)(x^2-2x+2)=0 .$$

Dans ces deux équations, l'origine des x est placé (fig. 4) en A sur quelque point de l'axe O_1A, qui laisse un sommet en dessous et deux en dessus, et deux intersections de la courbe du même côté ; mais, dans la première, la région des x positifs est à droite de A, et dans la seconde la région positive est à gauche ; ou bien, dans le deuxième cas, la figure est renversée de droite à gauche (fig. 4*).

Le théorème précédent lève le doute ; car, pour la première équation, on a

$$F=9a^3-32ab+48c=-167 ,$$

et les deux racines sont positives (fig. 4), tandis que, pour la deuxième équation, on a

$$F=9a^3-32ab+48c=339 ;$$

ce qui indique deux racines négatives (fig. 4*).

51. *Démonstration du théorème.* Soit la proposée

$$X=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ ,$$

et sa dérivée

$$X'=4x^3+3ax^2+2bx+c=0\ ;$$

dans le cas où $X=0$ contient deux racines imaginaires, et où d est positif, la courbe $X=y$ a deux sommets en dessus de l'axe, et un en dessous; c'est-à-dire que (fig. 4) y *maximum* a trois valeurs y_1, y_2, y_3, dont deux positives et une négative, auxquelles correspondent trois abscisses x_1, x_2, x_3, qui sont les racines de $X'=0$: il est évident que la question consiste à savoir quel est le signe de la racine de $X'=0$ qui correspond à y *maximum* négatif ou qui rend X négatif ; car, il est clair que les deux racines réelles de $X=0$ sont de même signe que celles de $X'=0$ qui est intermédiaire.

Dans le n.° 44, nous avons trouvé, entre les x et les y des sommets, la relation (2) que j'écris ainsi

$$64y=(9a^3-32ab+48c)x+(6a^2b-16b^2-4ac+64d)+\frac{c}{x}(3a^2-8b)\ ;$$

or, il est clair qu'en prenant x suffisamment grand, le signe du deuxième membre ne dépendra que de celui du premier terme, et qu'en prenant x, de signe contraire à celui de son coefficient

$$9a^3-32ab+48c\ ,$$

y sera nécessairement négatif ; ce qui démontre le théorème pour le quatrième degré.

La même démonstration s'étend à tous les degrés pairs ; mais, si le degré est impair, par exemple, du cinquième, en opérant comme ci-dessus, on arrivera à l'équation (2) du n.° 45, que j'écris ainsi

$$125y=(16a^3-55ab+75c)x^2+(12a^2b-10ac-30b^2+10d)x$$
$$+(8a^2c-5ad-20bc+125e)+\frac{d}{x}(4a^2-10b)\ .$$

Ici il faut distinguer deux cas : si $16a^3-55ab+75c$ est négatif, on pourra toujours prendre x positif assez grand pour que le deuxième membre, et par conséquent y, soit négatif ; ce qui démontre le théorème pour ce cas : si, au contraire, $16a^3-55ab+75c$ est positif, il faut, suivant le théorème, que x négatif rende encore le deuxième membre négatif, ce qu'il n'est pas aisé d'apercevoir ; mais si, dans l'équation $X=0$, on change $+x$ en $-x$, a et c changeront de signe, ainsi que

$$16a^3-55ab+75c\ ,$$

qui deviendra négative sans changer de grandeur absolue : ce second cas rentrera dans le précédent ; c'est-à-dire qu'on pourra prendre x positif assez grand pour que y soit négatif : donc, puisque les racines n'ont fait que changer de signe, on pouvait auparavant prendre x négatif assez grand pour que y fut négatif ; ce qui démontre encore le théorème pour ce cas (*).

On sent qu'on peut appliquer à tous les degrés impairs ce qu'on a dit du cinquième. Je ne m'arrête pas à démontrer l'expression générale de la quantité (F) du théorème, parce qu'il n'y a aucune difficulté à la déduire de l'équation

$$x^m+ax^{m-1}+\ldots\ldots\ldots=y\ ,$$

et de sa dérivée

$$mx^{m-1}+(m-1)ax^{m-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots=0\ ,$$

en opérant comme nous avons fait pour les quatrième et cinquième degrés.

Cette valeur de (F) est, pour les degrés 4, 5, 6, 7, 8,

$F_4=9a^3-32ab+48c$; $F_5=16a^3-55ab+75c$; $F_6=25a^3-84ab+108c$;

$F_7=36a^3-119ab+147c$; $F_8=49a^3-160ab+192c$.

(*) On peut objecter, à cette démonstration, que le signe de x^2 ne change pas, soit qu'on prenne x en $+$ ou en $-$; mais, si on multiplie la proposée par x, elle deviendra de degré pair, et l'on pourra lui appliquer la formule du sixième degré : l'expérience prouve, en effet, que les deux formules réussissent également.

52. Nous avons déjà vu (n.° 50) comment la combinaison de notre théorème avec celui de *Descartes* faisait distinguer le signe des racines réelles, quand on connaît le nombre des imaginaires : il ne sera pas inutile d'appliquer la méthode à une équation d'un degré plus élevé : je prends, pour deuxième exemple,

$$x^7+4x^6+5x^5-4x^4-13x^3-4x^2+7x+4=0=(x-1)^2(x+1)^3(x^2+3x+4),$$

dans laquelle on a reconnu (chap. VI) deux imaginaires : comme elle a deux variations et cinq permanences, j'en conclus qu'elle a nécessairement trois racines réelles négatives, et, de plus, deux racines réelles douteuses, parce que le facteur imaginaire du deuxième degré a pu introduire ou deux variations ou deux permanences; mais ce doute est levé par le signe négatif de F_7 qui vaut ici -664, et qui indique deux racines de signe contraire, c'est-à-dire, positives : donc, la proposée a deux racines imaginaires, trois réelles négatives, et deux réelles positives.

D'après ce qui précède, il est aisé de comprendre la formation et l'usage du tableau suivant, dans lequel, pour abréger, les lettres i, v, p, n, d remplacent les mots, racines imaginaires, variations, racines réelles positives, racines réelles négatives, racines réelles douteuses.

2.me *Degré*. Si la proposée n'a pas d'imaginaires, elle aura autant de p que de v.

3.me *Degré*. S'il n'y a point d'imaginaires, il y aura autant de p que de v. S'il y a deux imaginaires, la racine réelle sera de signe contraire à celui du terme constant.

Dans les tables qui suivent, le signe des deux racines douteuses marquées par la lettre d est toujours contraire à celui de F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, respectivement pour les degrés 4, 5, 6, 7, 8.

On n'a pas compris, dans ces tables, le cas où toutes les racines sont réelles, parce qu'alors on a autant de positives que de variations et de négatives que de permanences, ni celui où l'on a $i=m-1$, parce que, dans ce cas, la racine réelle unique est de signe contraire à celui du terme constant.

4.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	2	
2	1	1	1	
2	2			2
2	3	1	1	
2	4	2	0	

5.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	3	
2	1	1	2	
2	2		1	2
2	3	1		2
2	4	2	1	
2	5	3	0	

6.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	4	
2	1	1	3	
2	2		2	2
2	3	1	1	2
2	4	2		2
2	5	3	1	
2	6	4	0	
4	0	0	2	
4	1	1	1	
4	2			2
4	3	1	1	
4	4			2
4	5	1	1	
4	6	0	0	

7.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	5	
2	1	1	4	
2	2		3	2
2	3	1	2	2
2	4	2	1	2
2	5	3		2
2	6	4	1	
2	7	5	0	
4	0	0	3	
4	1	1	2	
4	2		1	2
4	3	1		2
4	4		1	2
4	5	1		2
4	6	2	1	
4	7	3	0	

8.me *Degré.*

i	*v*	*p*	*n*	*d*
2	0	0	6	
2	1	1	5	
2	2		4	2
2	3	1	3	2
2	4	2	2	2
2	5	3	1	2
2	6	4		2
2	7	5	1	
2	8	6	0	
4	0	0	4	
4	1	1	3	
4	2		2	2
4	3	1	1	2
4	4			4
4	5	1	1	2
4	6	2		2
4	7	3	1	
4	8	4	0	
6	0	0	2	
6	1	1	1	
6	2			2
6	3	1	1	
6	4			2
6	5	1	1	
6	6			2
6	7	1	1	
6	8	2	0	

On remarquera qu'un cas échappe à la méthode exposée ; c'est celui où la proposée étant du huitième degré, et ayant quatre racines imaginaires, a quatre variations et quatre permanences : alors les quatre imaginaires peuvent être prises de trois façons, savoir ; toutes quatre sur les variations, toutes quatre sur les permanences, ou deux sur les variations et deux sur les permanences. La formule F_3 ne peut lever que le doute qui résulte de deux combinaisons et non de trois. Il faut recourir ici à d'autres moyens qu'on verra plus bas.

On pourrait continuer ces tables pour des degrés plus élevés, et la règle s'appliquerait de même à tous les cas où le doute n'a lieu qu'entre deux combinaisons ; mais le nombre des cas douteux à triple, à quadruple, etc., combinaisons, va toujours en croissant : c'est pourquoi nous exposerons, plus bas, une autre méthode générale applicable à tous les cas sans exception, mais bien moins simple.

53. Tout ce que nous avons dit sur la première méthode ci-dessus, suppose que la proposée est complète ou a tous ses termes : s'il en manquait un ou plusieurs, on ne pourrait plus employer le nombre de ses variations. Dans ce cas, il suffirait de la multiplier par un facteur connu du premier degré, du deuxième degré...., et, en général, du degré suffisant, pour que le produit fût une équation complète : alors, après avoir assigné le nombre de chaque espèce de racines, on en retrancherait celles du facteur qui a été introduit : ainsi, ce cas rentre dans la méthode.

54. *Deuxième méthode plus générale.* Le but qu'on se propose dans le problème qui nous occupe, c'est de connaître les signes des racines x_1, x_2........de $X'=0$, correspondantes aux ordonnées y_1, y_2........ des sommets de la courbe parabolique : pour cela, il suffit de former une équation auxiliaire dont les racines soient les produits xy, ou les quotiens $\frac{y}{x}$: il est évident que les signes des racines de cette auxiliaire auront une correspondance intime et nécessaire avec ceux des x et des y, et que connaissant la position ou

le signe de y, ainsi que le signe de l'inconnue auxiliaire par le moyen des signes de l'équation auxiliaire, on connaîtra aussi le signe cherché de x.

Je pose donc $xy=z$ ou $xX=z$, et j'élimine x entre $xX=z$ et $X'=0$ première dérivée de $X=0$; il vient une équation en z que je représente par $Z=0$, et qu'on peut appeler équation des signes des racines réelles : elle caractérise les racines positives et négatives, comme l'équation $Y=0$ du chapitre VI caractérise les racines imaginaires : elles sont toutes deux du degré $m-1$, et leur ensemble complète la solution du problème général de la distinction des diverses espèces de racines.

La formation de l'auxiliaire $Z=0$ n'est pas plus difficile que celle de $Y=0$: le même mode d'élimination convient à toutes deux ; c'est pourquoi nous ne donnerons d'exemples que pour le quatrième degré. La première méthode que nous avons exposée dans ce chapitre est si simple, qu'il suffit presque de la seule inspection de la proposée pour assigner le nombre de ses racines réelles positives et négatives dans les huit premiers degrés : on ne devra donc recourir à l'équation $Z=0$, que dans les degrés supérieurs au huitième, et seulement dans les cas où le doute reposant sur plus de deux combinaisons, la première méthode est insuffisante.

Si $X=0$ n'avait pas tous ses termes, on se conduirait comme au n.° 53.

55. *Application au quatrième degré.* Soit

$$X=x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0\ ;$$

on a

$$X'=4x^3+3ax^2+2bx+c=0\ .$$

Eliminant x entre $xX=z$ et $X'=0$, on trouve, pour $Z=0$, la suivante :

$$4^5z^3+(-81a^5+504a^3b-624a^2c+768ad+1152bc-704ab^2)z^2$$
$$+2(-18a^4c^2-27a^4bd+21a^3b^2c+18a^3cd+79a^2bc^2-4a^2b^4$$
$$+144a^2b^2d-92ab^3c-272abcd-126ac^3+120b^2c^2+288c^2d$$
$$+16b^5$$

$$+16b^5+256bd^3-128b^3d)z-27a^4cd^2+a^3c^2(9bd-2c^2)$$

$$+a^2c(b^2c^2-6c^2d-4b^3d+144bd^2)+2ac^2(9bc^2-40b^2d$$

$$-96d^2)+c(144bc^2d-4b^3c^2+16b^4d+256d^3-128b^2d$$

$$-27c^4)=0\ . \qquad (Z)$$

Voyons maintenant comment il faut faire usage de cette équation $Z=0$. Dans le cas douteux du quatrième degré, $X=0$ a deux variations, et $X'=0$ en a une ou deux : l'origine des x peut avoir les quatre positions A, A', A'', A''' (fig. 4 et 4*) ; dans la (fig. 4), les deux racines de $X=0$ sont positives ; elles sont négatives dans la (fig. 4*) : les signes des coordonnées x, y des sommets S_1, S_2, S_3 sont donnés par leur position, et portent les mêmes indices : ceux des z sont donnés par la relation $z=xy$; c'est-à-dire, que z est positif quand x et y sont de même signe, et négatif quand x et y sont de signes différens. Les variations de $Z=0$ résultent des signes de z_1, z_2, z_3 : cela posé on a

En A , $+x_2+y_2$, $+x_3+y_3$, $-x_1+y_1$; $+z_2$, $-z_3$, $-z_1$; Z a 1 variation.

En A' , $+x_3-y_3$, $-x_2+y_2$, $-x_1+y_1$; $-z_3$, $-z_2$, $-z_1$; Z a 0 variations.

En A'' , $+x_2+y_2$, $+x_3+y_3$, $-x_1-y_1$; $+z_2$, $+z_3$, $+z_1$; Z a 3 variations.

En A''' , $+x_3+y_3$, $-x_2+y_2$, $-x_1-y_1$; $+z_3$, $-z_2$, $+z_1$; Z a 2 variations.

Or, les positions A , A' de l'origine sont relatives à deux racines positives dans $X=0$, et les positions A'' , A''' se rapportent à deux négatives : de là résulte cette règle pour les racines douteuses du quatrième degré.

Les deux racines de $X=0$ sont positives si $Z=0$ n'a point ou n'a qu'une variation, et négatives si Z a deux ou trois variations.

En raisonnant pour les autres degrés comme nous avons fait pour le quatrième, et, s'aidant des courbes paraboliques, il serait facile de construire une table qui indiquerait le signe des racines douteuses de la proposée, correspondant aux variations de l'auxiliaire $Z=0$ pour chaque degré. Ainsi, pour le cas de quatre racines douteuses, qui a lieu dans le huitième degré, lorsque X a quatre variations, on trouve que ces racines sont toutes quatre positives, si Z a une ou deux variations; toutes quatre négatives, si Z a cinq ou six variations; deux positives et deux négatives, si Z a trois ou quatre variations.

56. *Observations sur les méthodes de MM. Lagrange et Cauchy.* Le problème de la distinction des diverses espèces de racines, a exercé la sagacité de tous les géomètres. *M. de Gua* est le premier qui ait jeté du jour sur cette matière. Le célèbre *Lagrange* a donné ensuite les caractères de la réalité des racines, en faisant voir que l'équation aux quarrés des différences des racines, n'a que des variations de signe, quand la proposée a toutes ses racines réelles.

Cependant, on est obligé de convenir que cette méthode devient impraticable, quand la proposée est d'un degré un peu élevé, parce que l'auxiliaire aux quarrés des différences étant du degré $m.\frac{m-1}{2}$; devient impossible à former. L'illustre auteur qui ne s'est pas dissimulé cet inconvénient, a proposé une autre méthode dans sa *Résolution des équations numériques*, note VIII, pag. 177 : celle-ci est préférable en ce qu'elle n'emploie que des équations d'un degré inférieur à celui de la proposée : néanmoins, elle devient bientôt impraticable, parce qu'elle exige un nombre $m-1$ d'auxiliaires : elle a d'ailleurs un grand défaut qui lui est commun avec la première, celui de faire monter le nombre des conditions de réalité à $\frac{m(m-1)}{2}$; tandis que nous avons vu que le nombre indispensable n'est que $(m-1)$.

Enfin, M. *Cauchy* (*Journal de l'école polytechnique*, 17.me

cahier) a repris la deuxième méthode de *Lagrange*, en ajoutant à la recherche des imaginaires, celle du signe des racines réelles.

Ce géomètre emploie, comme moi, deux auxiliaires $Z=0$, $Y=0$, la première pour déterminer la différence entre le nombre des racines réelles positives, et celui des négatives de la proposée, la deuxième pour déterminer le nombre des racines réelles; mais, la première résulte de l'élimination de x entre $X'=0$ et $z+xXX''=0$, et la deuxième de l'élimination de $X'=0$ et $y+XX''=0$; on voit que ces deux équations $z+xXX''=0$ et $y+XX''=0$ diffèrent des miennes $z=xX$, $y=X$ par le facteur X'' qu'elles contiennent de plus que les miennes : aussi, les auxiliaires $Z=0$, $Y=0$ de M. *Cauchy* n'ont point la même signification que les miennes : nos deux méthodes ne se ressemblent qu'en apparence, mais diffèrent entièrement : ce sont deux routes qui, partant de deux points voisins, doivent arriver au même but par des circuits différens. M. *Cauchy* est obligé d'employer un nombre $m-1$ d'auxiliaires formées comme la première; tandis qu'il ne m'en faut qu'une : ses auxiliaires exigent une élimination plus longue que la mienne, à cause du facteur X'' qu'il emploie. Il cherche d'abord à distinguer le signe des racines réelles, puis il passe aux imaginaires : j'ai commencé, au contraire, par le deuxième problème qui résout presque entièrement le premier, tandis que l'inverse n'a pas lieu.

Il y a encore une autre différence très-importante entre les deux méthodes : celle de M. *Cauchy* suppose qu'aucune des $m-1$ auxiliaires successives n'ait de racines égales entre elles ou à zéro. Pour lever cet obstacle qui n'existe pas dans ma méthode, il emploie divers expédiens qui prouvent la sagacité de l'auteur; mais qui diminue bien peu le vice de sa méthode : c'est dans l'ouvrage même qu'il faut l'apprécier : il n'a fallu rien moins que nonante-une pages in-4.° pour la développer. On doit sans doute des éloges à l'auteur; mais, elle est si laborieuse et si difficile, qu'on sera rarement tenté de la mettre en pratique.

Je ne sais si je me fais illusion, mais je pense que ma méthode

est assez simple et facile pour devenir usuelle et entrer dans les livres élémentaires : mon équation fondamentale $Y=0$ est si simple, et se présentait si naturellement, que je ne conçois pas comment MM. *Lagrange et Cauchy* ont pu passer à côté sans l'apercevoir. Un problème difficile est une espèce de labyrinthe : plusieurs routes se présentent pour en sortir : les unes sont fausses, les autres inextricables : la véritable est cachée ; ce n'est pas toujours le plus habile qui la découvre ; c'est souvent le plus heureux.

CHAPITRE VIII.

MÉTHODE NOUVELLE POUR QUARRER LES COURBES.

Observations préliminaires.

57. LE problème de la quadrature des courbes, ou autrement de l'intégration des différentielles d'une seule variable, est d'une grande importance, puisque la plupart des questions aboutissent à une intégration.

Les géomètres ont proposé diverses méthodes d'intégrer, par approximation, les formules qui ne peuvent l'être ni algébriquement, ni par les arcs de cercle et les logarithmes : le moyen offert par les séries est souvent illusoire et trompeur, parce qu'elles ne sont pas toujours convergentes.

Un autre moyen connu consistait à substituer à la courbe à quarrer, une autre courbe du genre parabolique qu'on sait quarrer, et qu'on faisait coïncider à l'aide de coefficiens indéterminés : ainsi, pour intégrer $\int y\mathrm{d}x$, on posait

$$y=a+bx+cx^2\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et l'on avait

$$\int y\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x(a+bx+cx^2\ldots\ldots)=ax+\tfrac{1}{2}bx^2+\tfrac{1}{3}cx^3+\ldots\ldots;$$

on déterminait a, b, c, par la condition que la parabole passât par 3 ou n points donnés de la courbe proposée dont les ordonnées étaient équidistantes : enfin, on déterminait la constante ajoutée à

l'intégrale, de manièae à la faire correspondre aux deux limites assignées.

Ce procédé devenait long et impraticable quand les coefficiens *a*, *b*, *c* étaient en nombre un peu grand (Voy. note 1) : M. *Kramp* (*Annales de mathématiques*, tom. 6, pag. 372), remarquant que ces coefficiens numériques *a*, *b*, *c*........, demeurent invariables quand leur nombre est le même, les a calculés pour tous les cas depuis deux ordonnées jusqu'à treize, et il en déduit douze formules précieuses : leur usage est très-simple : la substitution des ordonnées connues donne tout de suite l'aire cherchée $\int X dx$, plus brièvement et plus exactement que par les méthodes connues des séries.

M. *Kramp* s'est arrêté à la formule relative à treize ordonnées : « J'aurais désiré, dit-il, de pouvoir continuer cette table jusqu'au » diviseur 24 ; mais l'immensité du travail m'a effrayé. Il doit » sans doute, y avoir quelque méthode beaucoup plus abrégée que, » celle que nous avons suivie ; mais jusqu'ici, au moins, je l'ai » cherchée vainement ».

J'ai cherché cette méthode, et j'ai eu le bonheur de la trouver : elle n'a rien de commun avec celle de M. *Kramp* ; elle est simple, et elle m'a fait trouver la formule relative à vingt-cinq ordonnées : j'ai rectifié en même temps quelques erreurs échappées à M. *Kramp*.

Exposé de ma méthode.

58. Le problème qui nous occupe peut être énoncé ainsi :

Connaissant les deux ordonnées extrêmes d'un arc de courbe, et plusieurs ordonnées intermédiaires équidistantes, exprimer en fonction de ces ordonnées, l'aire mixtiligne comprise entre les deux ordonnées extrêmes, la courbe et l'axe des x.

La solution de ce problème fournira aussi celle de l'intégration des fonctions d'une seule variable, puisque, intégrer $X dx$, c'est quarrer la courbe qui a pour équation $y = X$.

Soient y_0, y_1, y_2 .... y_n les ordonnées connues de la courbe $y=X$ qu'il s'agit de quarrer entre les limites y_0 et y_n. Soit S l'aire cherchée $=\int X dx$; et supposons le nombre des ordonnées connues $=7$. Ce que nous dirons de ce nombre 7 s'appliquera à tout autre.

1.° Je remarque que, quelle que soit la valeur de chacun des coefficiens de la formule que nous cherchons, ses ordonnées également éloignées des extrêmes, doivent y jouer le même rôle, parce que la première peut être prise pour la dernière, et *vice versâ* : ainsi, par exemple, y_2 et y_4 doivent avoir le même coefficient : cette observation réduit de moitié le nombre des coefficiens à trouver, et fait voir que la formule doit être de cette forme

$$S=A(y_0+y_6)+B(y_1+y_5)+C(y_2+y_4)+Dy_3 \; . \qquad (F)$$

2.° Les coefficiens indéterminés A, B, C, D doivent être tels que, quand la courbe proposée $y=X$ est quarrable, la formule (F) donne, pour l'aire S, une valeur numérique connue et exacte : ainsi, il est nécessaire et suffisant que ces coefficiens satisfassent à quatre observations qu'on pourra choisir parmi les plus simples, pourvu qu'elles soient distinctes et qu'elles ne se comportent pas l'une l'autre. (Note 5.)

3.° Supposons, pour première observation, que la courbe à quarrer est une ligne droite, parallèle à l'axe des x, dont elle est éloignée de la quantité 1, et que l'intervalle des ordonnées extrêmes est 6. L'espace à quarrer sera un rectangle $ABCD$ (fig. 15) : on aura

$$y_0=y_1=y_2=y_3=y_4=y_5=y_6=1 \; ,$$

aire $ABCD=S=6$, et la formule (F) deviendra

$$6=2A+2B+2C+D \; . \qquad (1)$$

4.° Je supposerai, pour deuxième observation, que la courbe à

quarrer est une parabole du deuxième degré, qui touche, par son sommet, l'axe AB des x en son milieu O, et qui passe par les angles CD du rectangle ci-dessus $ABCD$.

L'équation de cette parabole, en prenant l'origine au point O; sera $y=\frac{x^2}{9}$: en y faisant

$$x=0\,,\quad x=1\,,\quad x=2\,,\quad x=3\,,\quad x=-1\,,\quad x=-2\,,\quad x=-3\,,$$

on aura

$$y_0=1\,,\quad y_6=1\,,\quad y_1=y_5=\tfrac{4}{9}\,;\quad y_2=y_4=\tfrac{1}{9}\,,\quad y_3=0\,;\quad S=AC.\frac{AB}{3}=2\,;$$

$\left(\text{parce que } S=CAOBD=2\int y\,dx=2\int\frac{x^2dx}{9}=\frac{2x^3}{27}=2\right)$: la formule (F) devient, par la substitution de ces valeurs,

$$2=2A+\tfrac{8}{9}B+\tfrac{2}{9}C\,,$$

ou

$$9A+4B+C=9\,. \qquad (2)$$

5.° Je prends, pour troisième courbe d'expérience, la parabole $y=\frac{x^4}{9^2}$ passant par les points O, C, D, comme la précédente : ses sept ordonnées sont

$$y_0=y_6=1\,,\quad y_1=y_5=\frac{16}{9^2}\;y_2=y_4=\frac{1}{9^2}\,,\quad y_3=0\,;$$

son aire est

$$S=\tfrac{1}{5}.AB.AC=\tfrac{6}{5}\,;$$

substituant ces valeurs dans (F), on a

$$9^2.A+16B+C=\frac{35}{5}\,.$$

6.° Enfin, je prends, pour quatrième courbe d'observation, la parabole

parabole $y=\frac{x^6}{9^3}$, placée dans le rectangle $ABCD$, comme les précédentes : ses ordonnées sont

$$y_0=y_6=1\ ,\quad y_1=y_5=\frac{64}{9^3}\ ,\quad y_2=y_4=\frac{1}{9^3}\ ,\quad y_3=0\ ;$$

son aire est

$$S=\tfrac{1}{7}.AB.AC=\tfrac{6}{7}\ ;$$

la substitution de ces valeurs dans (F), la change en celle-ci

$$9^3.A+64.B+C=\frac{3^7}{7}\ . \qquad (4)$$

7.° Eliminant A, B, C entre les trois équations (2), (3), (4), on trouve très-simplement

$$A=\tfrac{41}{140}\ ,\quad B=\tfrac{216}{140}\ ,\quad C=\tfrac{27}{140}\ ;$$

ces valeurs mises dans (1), on en tire $D=\frac{272}{140}$: il ne reste plus qu'à substituer ces valeurs de A, B, C, D dans (F), après les avoir divisées par 6, afin de faire l'intervalle des ordonnées extrêmes égal à l'unité, et il vient finalement pour la formule cherchée

$$840.S=41(y_0+y_6)+216(y_1+y_5)+27(y_2+y_4)+272y_3\ . \qquad (F_6)$$

59. On procèdera de la même manière pour trouver les formules correspondantes à un nombre quelconque pair ou impair d'ordonnées. (Voy. note 3.)

Tout autre système de courbe d'expérience fournirait des formules, quelquefois différentes, qui exigeraient une élimination plus difficile, et qui, en général, seraient moins exactes. (Voy. note 5.)

Il serait, sans doute, superflu de rapporter ici tous les calculs qui ont servi à former le tableau ci-après, dans lequel j'ai rassemblé toutes les formules qui peuvent être nécessaires dans la pratique : cependant, comme celle relative à vingt-cinq ordonnées, ou au

diviseur 24, est la plus importante, et en même temps la plus longue à trouver, je crois devoir rapporter les bases du calcul, afin qu'on puisse, au besoin, vérifier la formule dont je garantis au reste l'exactitude, après l'avoir éprouvée sur plusieurs exemples.

On voit d'abord que la formule doit être de cette forme

$$S=A(y_0+y_{24})+B(y_1+y_{23})+C(y_2+y_{22})\ldots\ldots+Ny_{12}. \quad (F_{24})$$

Il faut treize expériences pour déterminer les treize coefficiens A, B, C, ...N; la première est toujours la droite CD ou parabole $y=x^0$.

Il faut imaginer ensuite les douze paraboles

$$y=\frac{x^2}{12^2}, \quad y=\frac{x^4}{12^4}, \quad y=\frac{x^6}{12^6}\ldots\ldots\ldots y=\frac{x^{24}}{12^{24}},$$

touchant toutes le milieu O de la base AB, et passant par les points C et D.

On calculera, dans chaque parabole, les vingt-quatre ordonnées égales deux à deux. Les douze aires ou valeurs de S seront, en faisant l'intervalle $AB=24$,

$$\frac{24}{3}, \frac{24}{5}, \frac{24}{7}, \frac{24}{9}, \frac{24}{11}, \frac{24}{13}, \frac{24}{15}, \frac{24}{17}, \frac{24}{19}, \frac{24}{21}, \frac{24}{23}, \frac{24}{25},$$

ce qui se démontre facilement par le calcul intégral.

Ayant substitué, dans (F_{24}), les valeurs y_0, $y_1\ldots\ldots y_{24}$, S, on aura les treize équations suivantes, dont la symétrie est remarquable,

$$2.A+2B+2C+2D+2E+2F+2G+2H+2I+2K+2L+2M+N=24 \quad (1)$$

$$12^2.A+11^2.B+10^2.C+9^2.D+8^2.E+7^2.F+6^2.G+5^2.H+4^2.I+3^2.K+2^2.L+M=\frac{12^3}{3} \quad (2)$$

$$12^4.A+11^4.B+10^4.C+9^4.D+8^4.E+7^4.F+6^4.G+5^4.H+4^4.I+3^4.K+2^4.L+M=\frac{12^5}{5} \quad (3)$$

. . . .

. . . .

$$12^{24}.A+11^{24}.B+10^{24}.C+9^{24}.D+8^{24}.E+7^{24}.F+6^{24}.G+5^{24}.H+4^{24}.I+3^{24}.K$$
$$+2^{24}.L+M=\frac{12^{25}}{25} \quad (13)$$

On éliminera M en retranchant (2) de (3), (3) de (4), (4) de (5).......; il viendra onze équations desquelles on éliminera L, en combinant toujours les deux équations voisines (Voy. note 2) : on continuera ainsi à éliminer K, I, H, G.......etc. On arrivera à la valeur de A et, en remontant, on aura B, C, D, E, etc., et enfin N par l'équation (1). Il faudra ensuite diviser chaque coefficient par 24, afin que l'intervalle des ordonnées extrêmes que nous avons fait $=24$ devienne $=1$.

60. Dans le tableau suivant, l'indice qui accompagne la lettre (F) indique le diviseur qui sert de base à la formule : ainsi, (F_6) signifie que l'intervalle des ordonnées extrêmes y_0, y_6 a été partagé en six parties égales, ou qu'il y a sept ordonnées. La lettre S représente toujours $\int X dx$, c'est-à-dire, l'aire cherchée.

Recueil de formules.

(F_1) $\quad 2S = y_0 + y_1.$

(F_2) $\quad 6S = y_0 + y_2 + 4y_1.$

(F_3) $\quad 8S = y_0 + y_3 + 3(y_1 + y_2).$

(F_4) $\quad 90S = 7(y_0 + y_4) + 32(y_1 + y_3) + 12y_2.$

(F_5) $\quad 288S = 19(y_0 + y_5) + 75(y_1 + y_4) + 50(y_2 + y_3).$

(F_6) $\quad 840S = 41(y_0 + y_6) + 216(y_1 + y_5) + 27(y_2 + y_4) + 272y_3.$

(F_8) $\quad 28350S = 989(y_0 + y_8) + 5888(y_1 + y_7) - 928(y_2 + y_6) + 10496(y_3 + y_5) - 4540y_4.$

(F_{10}) $\quad 598752S = 16067(y_0 + y_{10}) + 106300(y_1 + y_9) - 48525(y_2 + y_8)$

$$+ 272400(y_3 + y_7) - 260550(y_4 + y_6) + 427368y_5.$$

(F_{12}) $\quad 63063000S = 1364651(y_0 + y_{12}) + 9903168(y_1 + y_{11}) - 7587864(y_2 + y_{10})$

$$+ 35725120(y_3 + y_9) - 51491295(y_4 + y_8) + 87516288(y_5 + y_7) - 87797136y_6.$$

(F_{24}) $3693087735962625000S = 35200969735190093(y_0+y_{24})$

$+379270388261611008(y_1+y_{23})-1043444955653209152(y_2+y_{22})$

$+5985259999368555008(y_3+y_{21})-23348698048773157032(y_4+y_{20})$

$+78144929815004656128(y_5+y_{19})-215016221369057252032(y_6+y_{18})$

$+499068087287186884608(y_7+y_{17})-981114320530281465657(y_8+y_{16})$

$+1649142126612730224128(y_9+y_{15})-2380252128837057960192(y_{10}+y_{14})$

$+2962867290268854786048(y_{11}+y_{13})-3186001615464675100912y_{12}$.

Les cinq premières formules sont presque sans utilité dans la pratique, parce qu'elles donnent une approximation trop bornée : la sixième servira dans les cas les plus ordinaires, ainsi que la huitième : la dixième et la douzième devront être employées dans les cas où l'on veut avoir à peu près dix chiffres exacts ; la vingt-quatrième sera employée dans les cas très-rares où l'on veut pousser l'exactitude jusqu'à seize ou dix-huit chiffres.

Dans des cas extraordinaires, où l'on aurait besoin d'une approximation encore plus grande, on pourrait calculer une formule pour quarante-neuf ordonnées : il ne faudrait, pour cela, que du temps et de la patience : on peut aussi remplir, quoique moins parfaitement, le même but, en partageant l'intervalle des ordonnées extrêmes en un certain nombre de parties égales dont chacune est ensuite subdivisée en vingt-quatre, et l'on applique à chaque groupe de vingt-quatre divisions, la formule (F_{24}) ; en voici un exemple.

Je suppose l'intervalle total partagé en cent vingt parties par cent vingt-une ordonnées. Je représente, pour abréger, par p, a, b, c, d,......n les nombres de la formule (F_{24}), et l'on obtient tout de suite la suivante :

$$(F_{120})\qquad 5.p.S = a(y_0+2y_{24}+2y_{48}+2y_{72}+2y_{96}+y_{120})$$
$$+b(y_1+y_{23}+y_{25}+y_{47}+y_{49}+y_{71}+y_{73}+y_{95}+y_{97}+y_{119})$$
$$-c(y_2+y_{22}+y_{26}+y_{46}+y_{50}+y_{70}+y_{74}+y_{94}+y_{98}+y_{118})$$
$$+d(y_3+y_{21}+y_{27}+y_{45}+y_{51}+y_{69}+y_{75}+y_{93}+y_{99}+y_{117})$$
$$-e(y_4+y_{20}+y_{28}+y_{44}+y_{52}+y_{68}+y_{76}+y_{92}+y_{100}+y_{116})$$
$$+f(y_5+y_{19}+y_{29}+y_{43}+y_{53}+y_{67}+y_{77}+y_{91}+y_{101}+y_{115})$$
$$-g(y_6+y_{18}+y_{30}+y_{42}+y_{54}+y_{66}+y_{78}+y_{90}+y_{102}+y_{114})$$
$$+h(y_7+y_{17}+y_{31}+y_{41}+y_{55}+y_{65}+y_{79}+y_{89}+y_{103}+y_{113})$$
$$-i(y_8+y_{16}+y_{32}+y_{40}+y_{56}+y_{64}+y_{80}+y_{88}+y_{104}+y_{112})$$
$$+k(y_9+y_{15}+y_{33}+y_{39}+y_{57}+y_{63}+y_{81}+y_{87}+y_{105}+y_{111})$$
$$-l(y_{10}+y_{14}+y_{34}+y_{38}+y_{58}+y_{62}+y_{82}+y_{86}+y_{106}+y_{110})$$
$$+m(y_{11}+y_{13}+y_{35}+y_{37}+y_{59}+y_{61}+y_{83}+y_{85}+y_{107}+y_{109})$$
$$-n(y_{12}+y_{36}+y_{60}+y_{84}+y_{108})\,.$$

Dans l'emploi de toutes ces formules, il faut remarquer que si l'intervalle des ordonnées extrêmes, qu'on a pris pour unité, était en général c, il faudrait multiplier par c la valeur de S, donnée par la formule.

61. Il est une autre remarque importante : si la courbe à quarrer renferme un point d'inflexion, ou quelqu'autre point singulier, entre les limites de l'intégrale cherchée, il faut évaluer séparément les deux portions d'aires qui sont de part et d'autre du point singulier, sans quoi l'exactitude du résultat serait sensiblement altérée. (Voy. note 4.) On verra ci-après comment

M. *Kramp*, pour n'avoir pas fait cette attention, a été conduit à de fausses conséquences, et a cru apercevoir un paradoxe qui n'existe pas.

Application des formules.

62. Il me reste une dernière tâche à remplir : il faut soumettre nos formules à l'expérience qui est la vraie pierre de touche de toutes les théories.

Je prends, pour première application, la recherche du logarithme hyperbolique de deux : il s'agit, pour cela, d'intégrer $\frac{dx}{x}$, ou de quarrer l'hyperbole $y=\frac{1}{x}$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=2$.

Pour appliquer la formule (F_{24}), il faut faire dans $y=\frac{1}{x}$; successivement

$$x=1\,,\; x=2+\tfrac{1}{24}\,,\; x=1+\tfrac{2}{24}\,,\; x=1+\tfrac{3}{24}\ldots\ldots x=1+\tfrac{24}{24}\,,$$

et l'équation donne

$$y_0=1\,,\; y_1=\tfrac{24}{25}\,,\; y_2=\tfrac{12}{13}\,,\; y_3=\tfrac{8}{9}\,,\; y_4=\tfrac{6}{7}\,,\; y_5=\tfrac{24}{29}\,,\; y_6=0{,}8\,;$$

$$y_7=\tfrac{24}{31}\,,\; y_8=0{,}75\,,\; y_9=\tfrac{8}{11}\,,\; y_{10}=\tfrac{12}{17}\,,\; y_{11}=\tfrac{24}{35}\,,\; y_{12}=\tfrac{2}{3}\,,$$

$$y_{13}=\tfrac{24}{37}\,,\; y_{14}=\tfrac{12}{19}\,,\; y_{15}=\tfrac{8}{13}\,,\; y_{16}=0{,}6\,,\; y_{17}=\tfrac{24}{41}\,,\; y_{18}=\tfrac{4}{7}\,,$$

$$y_{19}=\tfrac{24}{43}\,,\; y_{20}=\tfrac{6}{11}\,,\; y_{21}=\tfrac{8}{15}\,,\; y_{22}=\tfrac{12}{23}\,,\; y_{23}=\tfrac{24}{47}\,,\; y_{24}=\tfrac{1}{2}\,.$$

Il ne s'agit que de substituer ces valeurs de $y_0 \ldots\ldots y_{24}$ dans la formule (F_{24}) : on opère d'une manière analogue pour les autres formules. Le tableau suivant présente les résultats obtenus pour S ou Log.2, par nos formules (F_6), (F_8), (F_{10}), (F_{12}), (F_{24}), et par la douzième de M. *Kramp*,

	Log.2 d'après *Bérard*.	Log.2 d'après *Kramp*.
(F_6)	0,6931480622	
(F_8)	0,6931472145	
(F_{10})	0,6931471820	
(F_{12})	0,693147180626I	0,6931471807262
(F_{24})	0,693147180559945310 .	

La vraie valeur est Log.2=0,693147180559945309 .

Il suit de ce tableau que le résultat de ma formule (F_{12}) est trop fort de 0,0000000000662 et celui de M. *Kramp* de 0,0000000001663 : l'erreur de M. *Kramp* est donc presque triple de la mienne : aussi, sa douzième formule est-elle différente de la mienne. (Voy. note 6.)

Le même tableau fait encore voir que le résultat de ma formule (F_{24}) n'est en défaut que d'une unité sur le dix-huitième chiffre, approximation qu'aucune autre méthode ne saurait donner aussi simplement, et qui excède de beaucoup les besoins ordinaires.

J'ai pris, pour deuxième application, la détermination de la longueur de l'arc de 45° ou de $\frac{\pi}{4}$: x étant la tangente de l'arc, il s'agit d'intégrer $\frac{dx}{1+x^2}$ depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, c'est-à-dire, de quarrer, entre les mêmes limites, la courbe $y=\frac{1}{1+x^2}$, en faisant successivement

$$x=0\ ,\quad x=\tfrac{1}{24}\ ,\quad x=\tfrac{2}{24}\ ,\ \ldots\ldots\ x=\tfrac{24}{24}\ ,$$

on trouve

$y_0 = 1$, $y_1 = \frac{576}{577}$, $y_2 = \frac{144}{145}$, $y_3 = \frac{64}{65}$, $y_4 = \frac{36}{37}$,

$y_5 = \frac{576}{601}$, $y_6 = \frac{16}{17}$, $y_7 = \frac{576}{625}$, $y_8 = \frac{9}{10}$, $y_9 = \frac{64}{73}$,

$y_{10} = \frac{144}{169}$, $y_{11} = \frac{576}{697}$, $y_{12} = \frac{4}{5}$, $y_{13} = \frac{576}{745}$, $y_{14} = \frac{144}{193}$,

$y_{15} = \frac{64}{89}$, $y_{16} = \frac{9}{13}$, $y_{17} = \frac{576}{865}$, $y_{18} = \frac{16}{25}$, $y_{19} = \frac{576}{937}$,

$y_{20} = \frac{36}{61}$, $y_{21} = \frac{64}{113}$, $y_{22} = \frac{144}{265}$, $y_{23} = \frac{576}{1105}$, $y_{24} = \frac{1}{2}$.

Ces valeurs mises dans ma formule (F_{24}), on trouve

$$\pi = 3,141592653589790,$$

valeur qui n'est en défaut qu'au seizième chiffre, tandis que M. *Kramp* n'a pu en trouver que douze d'exacts, par une combinaison laborieuse de plusieurs de ses formules.

Dans ce deuxième exemple, nous n'avons trouvé que quinze chiffres exacts, tandis que dans le premier nous en avions eu dix-sept et presque dix-huit. La raison de cette différence tient à ce que ici la courbe à quarrer $y = \frac{1}{1+x^2}$ a une inflexion au point dont les coordonnées sont $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{3}{4}$: cette circonstance donne lieu à une anomalie qui altère le resultat : il aurait fallu ne quarrer la courbe que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$: en multipliant le résultat de la formule par $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, on aurait eu la longueur de $\frac{\pi}{6}$; mais, nous n'avions ici pour objet que de comparer notre formule (F_{24}) avec le résultat de M. *Kramp*. Pour approcher davantage la valeur de π, il faudrait prendre pour x la tangente d'un très-petit arc sous-multiple de 30°, et appliquer la formule (F_{24}). (Voy. note 4.)

Ce

Ce géomètre, pour n'avoir pas fait attention au point d'inflexion, a été conduit à des conséquences fausses : en effet, sa formule n.° 8 lui a donné plus d'exactitude que celles des n.os 9 et 10, ce qui présentait un vrai paradoxe ; mais il faut remarquer que pour la formule n.° 8, il a pu s'opérer entre les aires des deux branches de la courbe, une compensation d'erreur qui a pu être plus favorable que pour les n.os 9, 10, 11. (Voy. note 4.)

63. Je crois pouvoir conclure de tous les essais que j'ai faits ; qu'au moyen de nos formules (F_6), (F_8), (F_{10}), (F_{12}), (F_{24}), (F_{120}), on tire tout le parti possible d'un nombre donné d'ordonnées, et que l'emploi de ces formules offre le moyen, à la fois le plus exact et le plus expéditif, d'intégrer les différentielles d'une seule variable. On peut, pour les diverses applications, consulter les mémoires cités dont les formules s'appliquent à la manière des nôtres.

Les géomètres sentiront que cette manière de déterminer les coefficiens d'une formule par des expériences faites sur des cas connus, dispense l'analiste d'une foule de raisonnemens dont l'algèbre fait tous les frais. L'esprit de cette méthode peut avoir bien d'autres applications utiles.

Notes sur le présent chapitre.

64. *Note* 1.re. Je vais chercher la formule (F_2) par le procédé indiqué (n.° 57) : on connait les trois ordonnées y_0, y_1, y_2 : en faisant successivement

$$x=0\ ,\quad y=y_0\ ;\quad x=\tfrac{1}{2}\ ,\quad y=y_1\ ;\quad x=1\ ,\quad y=y_2\ ;$$

dans

$$y=a+bx+cx^2\ ,$$

on a les trois équations

$$y_0=a\ ,\quad y_1=a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{4}c\ ,\quad y_2=a+b+c\ ,$$

desquelles, par élimination, on tire

$$a=y_0\ ,\quad b=-3y_0+4y_1-y_2\ ,\quad c=2y_0-4y_1+2y_2\ ;$$

Mettant ces valeurs de a, b, c dans

$$\int y\mathrm{d}x=ax+\tfrac{1}{2}bx^2+\tfrac{1}{3}cx^3\ ,$$

c'est-à-dire, dans

$$\int y\mathrm{d}x=a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}c\ ,$$

(en prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$), on trouve

$$6\int y\mathrm{d}x=y_0+y_2+4y_1\ ,$$

précisément comme porte le tableau du n.° 60.

Les autres formules de ce tableau se trouveraient par le même procédé ; mais le travail devient bientôt impraticable.

Note 2. M. *Kramp* (*Annales de mathématiques*, tom. 7, pag. 241) a fait plusieurs objections contre ma méthode exposée, tom. 7, pag. 101 du même recueil : je vais y répondre, en évitant, autant que je pourrai, le ton aigre de ce géomètre.

Il dit (pag. 244) « L'opération connue des soustractions réitérées ne suffira » pas pour diminuer chaque fois d'une unité le nombre des inconnues, ce » qui rendra la résolution complète des treize équations beaucoup plus laborieuse » qu'on ne pense » : c'est là une erreur palpable : en disant qu'il fallait combiner les deux équations voisines, je n'avais pas cru nécessaire d'ajouter qu'il fallait préalablement multiplier l'une d'elles par le nombre convenable, avant de faire la soustraction : avec cette explication, un coup-d'œil sur les équations à éliminer suffit pour apercevoir que chaque opération fait disparaître une inconnue.

Note 3. M. *Kramp*, pag. 245, dit que ma méthode n'est pas applicable aux diviseurs impairs : c'est encore là une erreur manifeste, et ma méthode n'exige aucune modification pour le cas dont il s'agit.

Qu'il s'agisse, en effet, de trouver (F_5) : en faisant (fig. 15) $AC=1$ et $AB=10$ (pour simplifier le calcul), et prenant, pour courbe d'expérience,

$$y=x^0=1\ ,\quad y=\frac{x^2}{5^2}\ ,\quad y=\frac{x^4}{5^4}\ ;$$

on obtient les trois équations

$$A+B+C=5\,,\quad 5^2A+3^2B+C=\frac{5^3}{3}\,,\quad 5^4A+3^4B+C=\frac{5^5}{5}\,,$$

desquelles on conclut, sans difficulté, la formule (F_5, après avoir divisé A, B, C par 10.

Note 4. En appliquant ces douze formules à la détermination de π, M. *Kramp* a formé un tableau où l'on observe, 1.° que les erreurs sont tantôt positives, tantôt négatives; 2.° que la formule du n.° 8 est plus exacte que les suivantes, 9.me, 10.me, 11.me. Cette singularité avait été remarquée par M. *Kramp* (tom. 6, pag. 379); mais, j'ai osé en rechercher la cause: je l'ai expliquée par un point d'inflexion dans la courbe à quarrer, circonstance qui avait échappé à M. *Kramp*. Ce géomètre ne veut point de mon explication, et s'indigne presque de ma témérité: il explique le paradoxe par un raisonnement qui me paraît tout-à-fait étranger à la question.

On a déjà vu que ce paradoxe n'a point lieu pour Log.2 (Voy. le tableau du n.° 62): j'ai appliqué les formules à plusieurs autres courbes sans inflexion, aucune anomalie n'a paru: je les ai appliquées ensuite à des courbes à inflexion, le même paradoxe a reparu.

Veut-on un exemple bien frappant de l'influence des points d'inflexion? Qu'on applique les formules à la parabole cubique $y-\frac{1}{2}=4(x-\frac{1}{2})^3$: on trouvera, par toutes les formules du tableau, sans distinction, que l'aire de l'espace compris entre l'abscisse $x=1$, l'ordonnée extrême $y=1$, et l'arc de courbe passant par l'origine, est exactement $\frac{1}{2}$: ainsi, la formule (F_1), qui n'emploie que les deux ordonnées extrêmes, est ici aussi exacte que toutes les autres: voici l'explication de cette singularité. Si l'on imagine un quarré construit sur $x=1$ et $y=1$, le centre de ce quarré coïncidera avec le point d'inflexion de la courbe; l'aire donnée par la formule (F_1) n'est autre chose ici que l'aire du triangle rectangle moitié du quarré ci-dessus; or, ce triangle est exactement égal à l'aire mixtiligne que l'on cherche, parce que la diagonale du quarré, laquelle passe par les points extrêmes de la courbe et par le point d'inflexion, forme deux segmens paraboliques égaux, l'un dans le triangle, l'autre en dehors; en sorte qu'il s'opère une compensation exacte qui rend le triangle égal à l'aire curviligne cherchée.

Enfin, veut-on une preuve tirée de la courbe même qui a présenté à M. *Kramp* le paradoxe dont il s'agit? Il suffit d'appliquer les formules à la courbe $y=\frac{1}{1+x^2}$, depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; car, entre ces limites, il n'y a pas d'inflexion: pour cela, il faut faire successivement, pour (F_{12}),

$$x=0\ ,\quad x=\frac{1}{12\sqrt{3}}\ ,\quad x=\frac{2}{12\sqrt{3}}\ldots\ldots\ldots x=\frac{12}{12\sqrt{3}}\ ,$$

pour avoir y_0, y_1, y_2, ...y_{12}, et multiplier le résultat de la formule par $\frac{1}{\sqrt{3}}$: on aura ainsi la longueur de l'arc $\frac{\pi}{6}$, et l'on trouvera

$$\pi=3,141592653597\ ,$$

résultat trop fort de 0,000 000 000 008 ; mais cependant plus exact que celui obtenu sur l'arc $\frac{\pi}{4}$ affecté d'un point d'inflexion ; si ensuite, on répète le calcul sur (F_2), (F_4), (F_6), (F_8), (F_{10}), on trouve que les erreurs vont en diminuant, qu'elles sont toutes positives, ou, dans le même sens, comme cela doit être : ainsi disparait le paradoxe en question.

En voilà assez, je pense, pour légitimer ce que j'avais dit sur les points d'inflexion, et pour prouver que, si on néglige les points singuliers, on perd la certitude de la coïncidence de la courbe parabolique avec la proposée, et que dès-lors la méthode parabolique d'approximation perd aussi une partie de sa supériorité sur celle des séries. (Voyez le *Mémoire de M. Servois*, *ANNALES*, tom. 8, pag. 73.)

Note 5. M. *Ampère*, dans son rapport, a dit que le nombre des coefficiens est $\frac{n}{2}$ pour le cas des n intervalles pairs, et $\frac{n+1}{2}$ pour le cas impair ; c'est sans doute, par inadvertance : un coup-d'œil sur le tableau des formules fait voir que ce nombre des coefficiens est $\frac{n}{2}$ dans le cas pair, et $\frac{n+1}{2}$ dans le cas impair.

M. *Ampère* dit encore que quelles que soient les courbes d'expériences que l'on choisira, pourvu que y soit une fonction rationnelle entière de x, dont le degré ne passe pas n, les coefficiens A, B...... seront toujours les mêmes : cette conclusion doit être restreinte ; en effet, il est facile de s'assurer par l'expérience, 1.° que deux équations du même degré, comme $y=a$ et $y=a+bx$, ne peuvent pas être employées simultanément pour trouver la même formule, parce qu'elles se comportent l'une l'autre, et qu'ensemble elles ne fournissent qu'une seule expérience ; 2.° qu'il en est de même des équations $y=kx^{2p}$ et $y=kx^{2p+1}$; 3.° que les courbes d'expériences doivent comprendre tous les degrés pairs, depuis $y=x^0$ jusqu'à $y=x^n$, quoiqu'on puisse substituer à un

degré pair le degré impair immédiatement supérieur, en renonçant à la simplicité des calculs ; 4.° que, si quelque courbe d'expérience passe le degré n, la formule qui en résulte est moins simple et, en général, moins exacte que sa correspondante dans le tableau n.° 60 ; parce qu'elle n'est pas identique avec celle que l'on obtient par le procédé de la note 1.

J'aurais dû, sans doute, insérer ces éclaircissemens dans le mémoire que j'ai adressé à l'Académie. Quoi qu'il en soit, M. *Ampère* a une célébrité trop bien acquise, et il aime trop la vérité, pour prendre en mauvaise part les précédentes observations.

Note 6. J'arrive au reproche le plus grave de M. *Kramp* : il affirme (*Annales*, tom. 7, pag. 245) que ma formule ($F_{1\,2}$) est *entièrement fausse et erronnée*, et il en apporte, pour preuve unique, qu'elle est différente de la siennne qui est nécessairement exacte.

Je réponds, 1.° que ma formule ($F_{1\,2}$) a donné plus d'approximation que celle de M. *Kramp*, dans les deux applications que j'ai rapportées, ce qui établit une première probabilité en ma faveur ; 2.° qu'après avoir refait mes calculs, j'ai retrouvé les mêmes coefficiens ; 3.° que MM. *Servois* et *Wronski* sont parvenus à ma formule par des méthodes qui leur sont propres.

Avant de connaître la réfutation complète que M. *Servois* a faite de toutes les objections de M. *Kramp*, et désirant que les géomètres ne conservassent aucun doute sur l'exactitude de mes formules reconnues utiles par l'académie, j'avais imaginé de faire proposer à M. *Kramp* un expédient qui avait plusieurs avantages, celui de terminer promptement les incertitudes, celui de rendre les auteurs plus circonspects et les critiques plus honnêtes.

Nous aurions déposé, M. *Kramp* et moi, chacun 1000 francs au secrétariat de l'académie, en la suppliant de faire vérifier ma formule ($F_{1\,2}$), et d'employer les 1000 francs du perdant à un prix sur une question à son choix.

Mais, depuis le mémoire de M. *Servois*, il y aurait peu de générosité de ma part à insister sur ce défit.

Note 7. Dans l'état actuel de l'analise, la méthode parabolique d'approximation est, sans doute, préférable à toutes les autres : remarquons cependant qu'on peut substituer à la courbe à quarrer, non seulement une courbe du genre parabolique, mais encore une autre courbe quelconque qui diffère très-peu de la proposée, par exemple, la développante qui passe par un nombre donné des points pris sur la proposée : cette réflexion ouvre un vaste champ aux recherches.

Voici un essai de ce genre qui pourra paraître intéressant. Il s'agit de quarrer l'hyperbole $y=\frac{1}{x}$, ou d'intégrer $\frac{dx}{x}$: je mets x^{1+n} pour x, et j'ai la courbe $y=\frac{1}{x^{1+n}}$ qui coïncide d'autant mieux avec l'hyperbole que n est plus petit.

Il s'agit à présent d'intégrer $\frac{dx}{x^{1+n}}$: l'intégrale est $-\frac{1}{nx^n}+c=\int y dx$. En prenant cette intégrale depuis $x=1$ jusqu'à $x=2$, elle donne $\text{Log.}2=\frac{1}{n}-\frac{1}{n.2^n}$.

Voilà donc une expression algébrique de Log.2 qui sera d'autant plus exacte qu'on prendra n plus petit. Si, par exemple, on fait $n=0,0001$, on trouve $\text{Log.}2=0,69$: si on prend pour n un multiple de $\frac{1}{2}$, on pourra, par des extractions successives de racines quarrées, approcher aussi près qu'on voudra de la vraie valeur de Log.2, sans employer des tables de logarithme.

INSTITUT DE FRANCE.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Paris, le 18

LE SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE pour les sciences mathématiques, certifie que ce qui suit est extrait du procès-verbal de la séance du lundi 10 février 1817.

Rapport sur un mémoire de M. *Bérard*, intitulé : *Méthode nouvelle pour quarrer les courbes et intégrer, entre des limites données, toute fonction différentielle d'une seule variable.*

N.º 65.

Le mémoire de M. *Bérard*, dont l'académie nous a chargé de lui rendre compte, a pour objet de trouver, par un procédé plus simple que ceux dont on a fait usage jusqu'à présent, la valeur approchée d'une intégrale dont la fonction dérivée et les limites sont données. On sait qu'il faut pour cela substituer à cette fonction dérivée une expression de la forme

$$a+bx+c^2+\text{ etc.},$$

où x représente la variable indépendante ; déterminer a, b, c, etc., de manière que les valeurs de cette expression et de la fonction dérivée correspondantes à des valeurs équidistantes de x en nombre égal à celui des coefficiens a, b, c, *etc.*, soient respectivement égales ; substituer ces valeurs dans l'expression

$$ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \text{etc.},$$

qui est l'intégrale de

$$(a+bx+cx^2+ \text{etc.})dx,$$

et prendre la différence des deux valeurs de cette dernière expression qui répondent à celles de la variable x aux deux limites.

Ce calcul est assez court quand les valeurs équidistantes de x sont en petit nombre entre ces deux limites; mais, dès que le nombre est un peu considérable, il devient tellement compliqué qu'on doit le regarder comme presque inexécutable. M. *Bérard* s'est proposé de trouver la formule qui en résulte, sans être obligé de faire le calcul comme nous venons de le dire; il remarque pour cela

1.° Qu'en représentant y_0, y_1, y_2, ...y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, les valeurs de la fonction dérivée qui répondent aux valeurs équidistantes de x, ce résultat est égal à une fonction de y_0, y_1, y_2, ...y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, où ces quantités ne peuvent entrer qu'au premier degré.

2.° Que celles qui se trouvent à égale distance des deux extrêmes y doivent avoir les mêmes coefficiens, en sorte que ce résultat peut être représenté par

$$A(y_0+y_n)+B(y_1+y_{n-1})+C(y_2+y_{n-2})+ \text{etc.};$$

en sorte que pour l'avoir il suffit de déterminer A, B, C, etc.; qui ne peuvent dépendre que du nombre des valeurs équidistantes de x que l'on considère, et qui sont par conséquent les coefficiens numériques qu'il suffit de déterminer une fois pour toutes, relativement à chaque valeur particulière de ce nombre.

M. *Bérard* donne, dans son mémoire, une méthode très-simple pour parvenir directement à cette détermination; cette méthode conduit aux mêmes valeurs pour les coefficiens dont nous parlons, que

que le procédé de substitution et d'intégration que nous venons d'indiquer. Il nous semble que l'auteur aurait rendu son mémoire plus complet en en faisant l'observation, et en en donnant une démonstration qui ne laissât rien à désirer ; c'est pourquoi nous croyons devoir expliquer ici sa méthode d'une manière un peu différente de celle qu'il a adoptée, afin que cette démonstration naisse, pour ainsi dire, de l'exposition même du procédé qui y conduit.

Le nombre des coefficiens à déterminer est évidemment $\frac{n}{2}$ quand le nombre n des intervalles est pair, et $\frac{n+1}{2}$ quand il est impair, tel est donc le nombre des équations entre ces coefficiens qu'il faut obtenir pour les déterminer.

Prenons une courbe qui soit un cas particulier quelconque de l'équation

$$y=a+bx+cx^2+\text{etc.}$$

La formule

$$A(y_0+y_n)+B(y_1+y_{n-1})+C(y_2+y_{n-2})+\text{etc.};$$

en supposant qu'on en eût calculé les coefficiens A, B, C, etc., par le long procédé décrit au commencement de ce rapport, représenterait rigoureusement l'aire de cette courbe entre des limites données ; d'où il suit que si d'une part on calcule directement cette aire, et que de l'autre on prenne les valeurs de y_0, y_1, y_2, ... y_{n-2}, y_{n-1}, y_n, correspondantes à ce cas particulier pour les substituer dans

$$A(y_0+y_n)+B(y_1+y_{n-1})+C(y_2+y_{n-2})+\text{etc.},$$

et égaler le résultat à la valeur trouvée pour l'aire, on aura une équation du premier degré exactement satisfaite par les valeurs de A, B, C, etc.

En prenant une autre courbe dont l'équation soit aussi renfermée comme cas particulier dans l'équation

$$y = a + bx + cx^2 + \text{etc.} ;$$

et, en répétant les mêmes opérations, on trouvera de même une seconde équation du premier degré entre A, B, C, etc.

Après avoir pris autant de ces cas particuliers qu'il y a d'unités dans $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ suivant que n est pair ou impair ; on aura donc autant d'équations du premier degré entre A, B, C, etc., qu'il y a de ces inconnues, et leur détermination ne souffrira plus alors aucune difficulté.

Il est évident que tant qu'on aura pris pour chaque cas particulier une valeur de y comprise dans l'équation

$$y = a + bx + cx^2 + \text{etc.} ;$$

c'est-à-dire, une fonction rationnelle entière de x dont le degré ne passe pas n, on trouvera, pour A, B, C, etc., les mêmes valeurs que par le procédé ordinaire, décrit au commencement de ce rapport ; et comme ces valeurs sont uniques, il est clair que quels que soient les cas particuliers qu'on choisisse, on arrivera toujours identiquement aux mêmes résultats ; c'est ce que M. *Bérard* ne paraît pas avoir remarqué ; car, il dit, après avoir expliqué les cas particuliers, qu'il a choisi et qu'il nomme courbes d'expériences.

« Tout autre système de courbes d'expérience fournirait des for-
» mules différentes qui seraient toujours moins simples, qui exigeraient
» une élimination plus difficile, et qui, en général, seraient moins
» exactes. »

Cela n'est vrai que dans le cas où l'on prendrait pour la valeur de y une fonction rationnelle entière de x, d'un degré plus élevé que le nombre n des intervalles, parce qu'alors cette valeur de y ne serait plus comprise dans la formule

$$y=a+bx+cx^2+\text{etc.} ;$$

dont on est parti pour établir que la valeur de l'intégrale est représentée par

$$A(y_0+y_n)+B(y_1+y_{n-1})+C(y_2+y_{n-2})+\text{etc.},$$

où A, B, C, etc., ont toujours les mêmes valeurs, quelles que soient celles de a, b, c, etc.

Mais, il existe une infinité de fonctions rationnelles de x dont le degré ne passe pas le nombre n, qui peuvent également servir, et qui donneront toutes identiquement le même résultat. Le passage du mémoire de M. *Bérard* doit donc être modifié, et il aurait dû se borner à dire que les équations paraboliques monomes de degré pair dont il se sert pour trouver les formules qu'il cherche sont les plus commodes à employer dans la pratique. Cette observation ne fait rien, au reste, à l'utilité qu'on peut retirer du mémoire de M. *Bérard* et des formules, toutes calculées, qu'il contient pour des nombres d'intervalles égaux à 1, à 2, à 3, à 4, à 5, à 6, à 8, à 12 et à 24. Nous pensons, en conséquence, que ce travail mérite l'approbation de l'académie, et qu'il serait à désirer qu'il fût publié, et qu'on fît connaître cette méthode, qui est susceptible d'utiles applications, dans les ouvrages élémentaires.

Signés à la minute, Poinsot, Ampère, *rapporteur.*

L'Académie approuve le rapport et en adopte les conclusions.

Certifié conforme à l'original,

Le Secrétaire perpétuel, chevalier des Ordres Royaux de St-Michel et de la Légion d'honneur,

Delambre.

CHAPITRE IX.

CUBATURE DES SOLIDES ET QUADRATURE DE LEUR SURFACE.

La méthode que j'ai exposée dans le chapitre VIII, pour quarrer les surfaces, s'applique, sans difficulté et avec avantage, à la cubature des solides. Je vais parcourir quelques cas généraux, et donner quelques applications propres à faciliter l'emploi de la méthode.

Parallélipipède recouvert par une surface courbe.

66. On sait qu'un prisme triangulaire, tronqué par un plan incliné à sa base, est égal au produit de cette base par le tiers de la somme des trois arêtes, si le prisme est droit, ou par le tiers des trois hauteurs, si le prisme est oblique.

Si l'on a un parallélipipède, tronqué par un plan incliné à sa base, dont les hauteurs des arêtes soient h, h', h'', h''', b la surface de la base, et V le volume; en le décomposant en deux prismes triangulaires par un plan passant par h et h'', on aura, d'après l'article précédent,

$$V = \tfrac{1}{2} b . \frac{h + h' + h''}{3} + \tfrac{1}{2} b \frac{h + h'' + h'''}{3} :$$

Décomposant de nouveau le parallélipipède par un plan passant par h' et h''', on aura semblablement

$$V = \tfrac{1}{2} b . \frac{h+h'+h'''}{3} + \tfrac{1}{2} b . \frac{h'+h''+h'''}{3} .$$

Ajoutant les deux équations ci-dessus, il vient

$$V = b . \frac{h+h'+h''+h'''}{4} ;$$

ou

$$V = b . \frac{h+h''}{2} = b . \frac{h'+h'''}{2} ;$$

théorème simple que je n'ai pas rencontré dans les livres élémentaires.

67. Imaginons maintenant un parallélipipède recouvert par une surface courbe : si on le coupe par des plans équidistans et parallèles aux faces, il sera décomposé en petits parallélipipèdes ayant tous la même base b. En ajoutant tous ces parallélipipèdes, et faisant la réduction, on trouve la règle suivante.

Ajoutez ensemble, 1.° toutes les hauteurs des arêtes intérieures ou invisibles; 2.° la moitié de toutes les hauteurs des arêtes extérieures ou de faces visibles, à l'exception de celles des quatre angles; 3.° le quart des hauteurs des arêtes des quatre angles. Multipliez cette somme totale par la base b, commune à tous les parallélipipèdes partiels : le produit sera le volume cherché V du parallélipipède curviligne.

Si la base du solide, au lieu d'être un parallélogramme, était un triangle ABC qui en est la moitié, on diviserait AB et AC en un même nombre de parties égales, et l'on mènerait, par les points de divisions, des parallèles à AB, AC; la règle précédente s'appliquerait ici, mot à mot, avec cette seule différence, qu'au lieu de prendre le quart des hauteurs des arêtes en B et C, il ne faudrait en prendre que le huitième.

Cette règle fort simple donne le volume du polyèdre inscrit dans la surface courbe : elle donne une approximation d'autant plus grande,

que le nombre des petits parallélipipèdes est plus grand : on verra plus bas une méthode plus rigoureuse.

Des solides de révolution.

68. En représentant par π le rapport 3,1415926 du diamètre à la circonférence, on sait que l'expression du volume d'un solide de révolution est

$$V=\pi\int y^2 dx\ ,$$

expression dans laquelle x est l'abscisse et y l'ordonnée de la courbe qui engendre le solide, en tournant autour de l'axe des x.

En faisant $y^2=z$, on a

$$V=\pi\int z dx\ ,$$

et l'on voit que la question se réduit à quarrer la courbe dont les abscisses sont x, et les ordonnées z ou y^2. Les formules du n.° 60 s'appliquent donc ici en y mettant $\frac{V}{\pi}$ pour S et $y_0^2, y_1^2, y_2^2 \ldots$ pour $y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots$

Ainsi, par exemple, si l'on a partagé en six l'intervalle a des ordonnées extrêmes y_0, y_6, la formule (F_6) qu'il faudra employer, deviendra

$$\frac{840}{\pi a}.V=41(y_0^2+y_6^2)+216(y_1^2+y_5^2)+27(y_2^2+y_4^2)+272y_3^2\,.$$

$y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots$, devront être calculées par l'équation $y=X$ de la courbe, si elle est donnée, ou mesurée sur le solide lui-même, si l'équation n'est pas connue.

Des solides curvilignes quelconques.

69. Nous allons examiner maintenant le cas le plus général, celui d'un solide dont la base quelconque est recouverte par une

surface courbe quelconque dont on a ou dont on n'a pas l'équation.

On sait que l'expression du volume d'un solide est

$$V=\int\int z\,dx\,dy=\int dx\int z\,dy\ .$$

Imaginons qu'ayant divisé en parties égales, en six, par exemple, l'axe des x compris entre les plans extrêmes qui renferment le solide proposé, on ait conduit par les points de division des plans parallèles aux précédens ou à celui des yz, la surface de chacune de ces sections sera exprimée par $\int z\,dy$: nommons S_0, S_1, S_2......S_6 ces surfaces, et S l'une quelconque d'entre elles : l'expression ci-dessus du solide deviendra

$$V=\int S\,dx\ .\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En considérant S comme l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse, l'aire de cette courbe représentera $\int S\,dx$, c'est-à-dire, V: on aura donc, pour le cas actuel de six divisions, la valeur de V, par la formule (F_6) du n.° 60, qui deviendra, en appelant a l'intervalle des plans extrêmes

$$\frac{840}{a}\cdot V=41(S_0+S_6)+216(S_1+S_5)+27(S_2+S_4)+272S_3\ .\quad (F_6)$$

Pour faire usage de cette formule, il faut préalablement trouver les valeurs de S_0, S_1.......S_6. Pour distinguer plus clairement les quarante-neuf verticales z que renferment les sept sections S_0, S_1......S_6, concevons que (fig. 16) l'axe AX des x ou a, et l'axe AY des y ou y_0 portent, à partir de l'origine A, les numéros 0, 1, 2.......6, que chaque ordonnée y_1, y_2........y_6, soit aussi divisée en six parties égales, et qu'enfin on ait joint par une courbe les points de division des sept ordonnées y; les 49z correspondans aux quarante-neuf points d'intersections, pourront être distingués par la combinaison de deux accens correspondant aux numéros des deux axes. Ainsi, les z élevés sur y_0 seront ${}^0z_0$,

${}^{0}z_1$, ${}^{0}z_2$, ${}^{0}z_3$, ${}^{0}z_4$, ${}^{0}z_5$, ${}^{0}z_6$ pour la section S_0 ; c'est-à-dire, pour le plan coordonné yz : de même les z seront marqués par ${}^{1}z_0$, ${}^{1}z_1$, ${}^{1}z_2$, ${}^{1}z_3$, ${}^{1}z_4$, ${}^{1}z_5$, ${}^{1}z_6$ pour la section S_1, passant par y_1, et ainsi de suite, en sorte que l'accent d'en haut indique la section, et celui d'en bas la courbe.

En vertu de cette notation, S_0, S_1....... seront données par les sept formules suivantes qui sont la traduction de (F_6) du n.° 60.

$$\frac{840}{y_0}.S_0=41({}^{0}z_0+{}^{0}z_6)+216({}^{0}z_1+{}^{0}z_5)+27({}^{0}z_2+{}^{0}z_4)+272{}^{0}z_3\ ;$$

$$\frac{840}{y_1}.S_1=41({}^{1}z_0+{}^{1}z_6)+216({}^{1}z_1+{}^{1}z_5)+27({}^{1}z_2+{}^{1}z_4)+272{}^{1}z_3\ ;$$

....

$$\frac{840}{y_6}.S_6=41({}^{6}z_0+{}^{6}z_6)+216({}^{6}z_1+{}^{6}z_5)+27({}^{6}z_2+{}^{6}z_4)+272{}^{6}z_3\ ,$$

Si l'équation de la surface n'est pas connue, il faudra mesurer les quarante-neuf verticales z sur le solide même.

Si l'équation de la surface est donnée en y faisant $z=0$, on aura $y=X$ pour celle de son intersection avec le plan des xy, et celle-ci fera connaître y_0, y_1.......y_6 : on aura ensuite les z de la première section S_0 en mettant dans $z=f(x, y)$, o pour x, et o $\frac{y_0}{6}$, $\frac{2y_0}{6}$, $\frac{3y_0}{6}$, $\frac{4y_0}{6}$, $\frac{5y_0}{6}$, y_0 pour y, et ainsi de suite pour les autres sections.

Si la base ou plan des xy n'était pas rencontrée par la surface, mais était enveloppée par une surface cylindrique recouverte par la surface $z=f(x, y)$, l'equation de la courbe intersection de la surface cylindrique avec le plan des xy serait connue, et de cette forme $y=X$; ce qui ferait connaître y_0, y_1........y_6. On calculerait ensuite les z comme dans le cas précédent.

Le cas d'un parallélipipède recouvert par une surface courbe est une variété du précédent.

70.

70. *Exemple* 1. Imaginons une demi-sphère dont le rayon est $\sqrt{2}]$ posée sur sa base que je prends pour plan des xy : concevons un quarré inscrit dans le cercle de cette base, et un parallélipipède ayant pour base ce quarré : on demande le volume de ce parallélipipède recouvert par une portion de la surface sphérique.

L'équation de la surface sera

$$z=\sqrt{2-x^2-y^2}] \ ,$$

et il est évident qu'il suffira de chercher le volume de la portion du solide ayant pour base le quarré inscrit dans l'un des cadrans, laquelle portion sera le quart du solide total : il n'est pas moins évident que le côté du quarré partiel que nous considérons est 1.

Pour abréger l'opération, je ne supposerai que quatre intervalles dans le côté $=1$ du quarré ci-dessus, et la formule a employer sera

$$90V=7(S_0+S_4)+32(S_1+S_3)+12S_2 \ ,$$

Pour avoir S_0; c'est-à-dire, l'aire du plan des yz, je fais $x=0$ dans $z=\sqrt{2-x^2-y^2}]$, qui devient $z=\sqrt{2-y^2}]$: je mets dans celle-ci pour y successivement 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, et j'ai les cinq verticales ou valeurs de z de la section S_0, laquelle est donnée par l'équation

$$90S_0=7(\sqrt{2}+1)+32(\tfrac{1}{4}\sqrt{31}+\tfrac{1}{4}\sqrt{23})+12.\tfrac{1}{2}\sqrt{7} \ .$$

Pour avoir S_1, je mets $\frac{1}{4}$ pour x dans $z=\sqrt{2-x^2-y^2}]$, qui devient $z=\sqrt{\frac{31}{16}-y^2}]$, et je substitue pour y successivement 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1; ce qui donne les cinq valeurs de z de la section S_1, laquelle est à son tour donnée par la formule suivante

$$90.S_1=7(\tfrac{1}{4}\sqrt{31}+\tfrac{1}{4}\sqrt{15})+32(\tfrac{1}{4}\sqrt{30}+\tfrac{1}{4}\sqrt{22})+12.\tfrac{3}{4}\sqrt{3}] \ .$$

En mettant ensuite $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1 pour x dans z, et 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, pour y, on aura de même les cinq valeurs de z pour les sections

S_2 , S_3 , S_4 ; qui seront données par les équations suivantes :

$$90 S_2 = 7(\tfrac{1}{2}\sqrt{7} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) + 32(\tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{4}\sqrt{19}) + 12 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{6} \ .$$

$$90 S_3 = 7(\tfrac{1}{4}\sqrt{23} + \tfrac{1}{4}\sqrt{7}) + 32(\tfrac{1}{4}\sqrt{22} + \tfrac{1}{4}\sqrt{14}) + 12 \cdot \tfrac{1}{4}\sqrt{19} \ .$$

$$90 S_4 = 7(1 + 0) + 32(\tfrac{1}{4}\sqrt{15} + \tfrac{1}{4}\sqrt{7}) + 12 \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \ .$$

Il ne reste plus qu'à mettre , dans la formule qui donne V, les valeurs précédentes de S_0 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , et l'on trouvera

$$V = 1,1356 \ .$$

La vraie valeur de V que l'on trouve facilement (en remarquant que le solide total proposé vaut la demi-sphère moins quatre demi-segmens sphériques) , est

$$V = 1,1370 \ .$$

On ne sera pas étonné que l'approximation ne soit pas plus grande , si l'on fait attention que la formule employée (F_4) a pour base la division de l'espace à sommer en quatre parties seulement.

71. *Exemple* 2. Nous prendrons , pour deuxième application , le cas d'un solide renfermé entre le plan des xy et une surface courbe qui le rencontre : nous chercherons le volume de $\frac{1}{8}$ de la sphère dont le rayon $=1$: ce segment est compris entre les trois plans coordonnés qui passent par le centre de la sphère ayant pour équation

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ ;$$

pour plus de brièvete , nous ne supposerons que cinq sections ; S_0 , S_1 , S_2 , S_3 , S_4.

En mettant successivement , dans l'équation de la sphère , o , $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ 1 pour x , et zéro pour z , on a les cinq ordonnées y du

cercle qui est l'intersection de la surface avec le plan des xy; savoir :

$$y_0=1\ ,\quad y_1=\tfrac{1}{4}\sqrt{15}\ ,\quad y_2=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ ,\quad y_3=\tfrac{1}{4}\sqrt{7}\ ,\quad y_4=0\ .$$

Pour avoir les cinq verticales z, de la section S_0, je fais $x=0$ dans l'équation de la surface qui devient

$$z=\sqrt{1-y^2}]\ ,$$

et j'y mets, pour y successivement

$$0\ ,\ \frac{y_0}{4}\ ,\ \frac{y_0}{2}\ ,\ \frac{3y_0}{4}\ ,\ y_0\ ;$$

et j'ai

$${}^0z_0=1\ ,\quad {}^0z_1=\tfrac{1}{4}\sqrt{15}\ ,\quad {}^0z_2=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ ,\quad {}^0z_3=\tfrac{1}{4}\sqrt{7}\ ;\quad {}^0z_4=0\ :$$

Pour avoir les cinq z de la section S_1, je fais $x=\frac{1}{4}$ dans

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}\ ,$$

qui devient

$$z=\sqrt{\tfrac{15}{16}-y^2}\ ,$$

et j'y mets pour y successivement

$$0\ ,\ \frac{y_1}{4}\ ,\ \frac{y_1}{2}\ ,\ \frac{3y_1}{4}\ ,\ y_1\ ;$$

et il vient

$${}^1z_0=\tfrac{1}{4}\sqrt{15}\ ,\ {}^1z_1=\tfrac{15}{16}\ ,\ {}^1z_2=\tfrac{3}{8}\sqrt{5}\ ,\ {}^1z_3=\tfrac{1}{16}\sqrt{7.15}\ ,\ {}^1z_4=0\ .$$

En opérant de même, on trouve que les cinq z de la section S_2, sont

$${}^2z_0=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\ ,\quad {}^2z_1=\tfrac{3}{8}\sqrt{5}\ ,\quad {}^2z_2=\tfrac{3}{4}\ ,\quad {}^2z_3=\tfrac{1}{8}\sqrt{3.7}\ ,\quad {}^2z_4=0\ ;$$

que les cinq z de S_3 sont

$^3z_0 = \frac{1}{4}\sqrt{7}$, $^3z_1 = \frac{1}{16}\sqrt{7.15}$, $^3z_2 = \frac{1}{8}\sqrt{3.7}$, $^3z_3 = \frac{1}{16}$, $^3z_4 = 0$;

et que les cinq z de S_4 sont nuls.

Maintenant, il faut chercher les valeurs de S_0 ; S_1........S_4, par les équations suivantes :

$$\frac{90}{\gamma_0}.S_0 = 7(^0z_0 + ^0z_4) + 32(^0z_1 + ^0z_3) + 12\,^0z_2 .$$

$$\frac{90}{\gamma_1}.S_1 = 7(^1z_0 + ^1z_4) + 32(^1z_1 + ^1z_3) + 12\,^1z_2 ;$$

$$\frac{90}{\gamma_2}.S_2 = 7(^2z_0 + ^2z_4) + 32(^2z_1 + ^2z_3) + 12\,^2z_2 .$$

$$\frac{90}{\gamma_3}.S_3 = 7(^3z_0 + ^3z_4) + 32(^3z_1 + ^3z_3) + 12\,^3z_2 \; ; \; S_4 = 0 \; ;$$

Il ne reste qu'à substituer ces valeurs de S_0.......S_4, dans la suivante ou $a = 1$.

$$\frac{90}{a}.V = 7(S_0 + S_4) + 32(S_1 + S_3) + 12.S_2 \; ;$$

on trouvera, après les réductions

$$135.V = 7 + 8(\sqrt{15} + \sqrt{7}) + 6\sqrt{3} ,$$

d'où

$$V = 0,5151 \; ;$$

La vraie valeur est

$$V = 0,5236 \; ;$$

L'approximation trouvée est sans doute bien faible ; mais si, au lieu de vingt-cinq ordonnées z, on en avait employé 6^2, 7^2, 8^2, on aurait approché de plus en plus de la vraie valeur : il ne s'agissait ici que d'indiquer brièvement la marche du calcul.

On se conduirait encore de la même manière dans le troisième cas ; c'est-à-dire, celui où le solide est renfermé entre les plans de xy, une surface cylindrique élevée sur ce plan, et une surface courbe rencontrée par le cylindre.

Des aires des surfaces courbes.

72. L'aire d'une surface courbe s'obtient par la même formule d'intégration que le volume d'un solide : en effet, soit

$$u=F(x,y),$$

l'équation de cette surface, et

$$\mathrm{d}u=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y;$$

sa différentielle ; l'aire que j'appelle A sera donnée par cette formule

$$A=\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}y\sqrt{1+p^2+q^2},$$

ou, en posant

$$1+p^2+q^2=z^2;$$

par

$$A=\int\mathrm{d}x\int z\mathrm{d}y,$$

formule qui peut représenter le volume d'un solide, et que l'on traitera précisément comme on a fait dans le précédent article. (Voyez le *Traité du calcul intégral de Lacroix*, in-4.°, tom. II, pag. 198.)

Surfaces de révolution.

73. Soit

$$u=F(x);$$

l'équation de la courbe génératrice d'une surface de révolution, et

$$\mathrm{d}u=p\mathrm{d}x;$$

sa différentielle : la surface A sera, comme on sait, exprimée par

$$A = 2\pi \int u \sqrt{dx^2 + du^2} = 2\pi \int dx u \sqrt{1+p^2} \; ;$$

en posant

$$y = u\sqrt{1+p^2} \; ,$$

on aura

$$A = 2\pi \int y dx \; ,$$

formule que l'on traitera précisément comme celle du n.° 60.

Rectification des lignes à simple et à double courbures.

74. Soit

$$u = F(x) \; ,$$

l'équation d'une courbe plane, et

$$du = p dx \; ,$$

sa différentielle : la longueur s de la courbe sera exprimée par

$$s = \int \sqrt{dx^2 + du^2} \; ,$$

ou

$$s = \int dx \sqrt{1+p^2} \; ,$$

ou, en posant

$$y = \sqrt{1+p^2} \; ,$$

par

$$s = \int y dx \; ,$$

formule qui rentre dans le cas du n.° 60.

Dans le cas d'une courbe à double courbure, soient

$$u = F(x) \; , \quad t = F'(x) \; ,$$

les projections de la courbe, et

$$du = p dx \; , \quad dt = q dx \; ,$$

leurs différentielles : la longueur s d'un arc fini sera exprimé par

$$s = \int \sqrt{dx^2 + du^2 + dt^2} = \int dx \sqrt{1 + p^2 + q^2} \; ,$$

ou, en posant

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\gamma\ ;$$

par

$$s=\int\gamma\,dx\ ,$$

formule qui rentre encore dans le cas du n.° 60.

75. *Observations.* On voit, par ce qui précède, qu'il n'est aucun cas de rectification, de quadrature et de cubature, auquel on ne puisse appliquer la méthode d'approximation fournie par les formules du n.° 60. Sans doute ces formules ne devront être employées que dans les cas où l'intégration ne peut avoir lieu, mais aussi, elles offriront alors le moyen d'approximation le plus prompt et le plus exact, pour intégrer toutes les formules de ces deux formes

$$\int y\,dx\ ;\quad \int dx\int z\,dy\ .$$

J'observerai encore que la méthode dont il s'agit revient, au fond, pour le cas d'un solide, à substituer à l'équation de la surface donnée

$$z=F(x,y)\ ,$$

celle d'une surface du genre parabolique, de cette forme

$$z=(a+bx+cx^2\ldots\ldots)(a'+b'y+c'y^2\ldots\ldots)$$

$$=A+Bx+Cx^2\ldots\ldots+B'y+C'y^2\ldots\ldots+Kxy+Lx^2y+Mxy^2+Nx^2y^2\ldots\ldots\ ,$$

en déterminant les coefficiens A, B, C......, par la condition que la surface parabolique passe par un nombre 2^2, 3^2, 4^2......n^2 de points de la surface proposée. On pourrait déterminer ces coefficiens en employant des surfaces d'expérience, comme nous avons fait des courbes d'expérience dans le n.° 59, mais ce procédé serait pénible : nous sommes arrivés bien plus simplement au même but, en partant des formules déjà trouvées dans le n.° 60.

Je remarquerai encore que la méthode d'approximation employée pour l'intégration $\int y\,dx$; $\int\int z\,dx\,dy$ peut s'étendre sans difficulté aux formules d'intégrales triples, telles que

$$\int\int\int V\,dx\,dy\,dz\ ;$$

mais ces détails sortiraient des bornes que je me suis prescrites.

CHAPITRE X.

DU TONNEAU ÉLASTIQUE OU THÉORIE NOUVELLE ET PLUS RIGOUREUSE DU JAUGEAGE.

Observations préliminaires.

Le tonneau est non seulement une invention utile dans les arts; mais encore une machine digne de piquer la curiosité des géomètres par les problèmes intéressans qu'elle présente : aussi beaucoup de savans s'en sont-ils occupés. Aucun d'eux cependant ne me paraît avoir deviné la vraie figure du tonneau.

On a considéré, tour-à-tour, la courbe génératrice du tonneau comme une ligne droite, un arc de cercle, un arc d'ellipse, d'hyperbole et de parabole : on a proposé une foule de jauges qui reposent sur de fausses suppositions de la figure du tonneau : quelques-uns de ces instrumens supposent même que tous les tonneaux sont des solides semblables, d'où résultent les erreurs les plus grossières.

M. *Camus* considéra une demi-douve comme formée d'un arc parabolique terminé par une ligne droite tangente à l'extrémité de cet arc. (*Encyclopédie méthodique*, Jaugeage.)

Pour découvrir la vraie figure du tonneau, il ne fallait cependant qu'analiser ce qui se passe dans sa construction. L'ouvrier prépare des douves planes ayant la figure de deux trapèzes réunis par leurs grands côtés parallèles (fig. 18) : après les avoir

avoir rangés cylindriquement, en les faisant toucher par les milieux, il oblige les extrémités divergentes à se rapprocher pour s'adapter contre les deux fonds : des cercles les assujettissent dans cette position, et le tonneau est formé.

On voit que dans cette opération, la douve doit prendre la même courbure que si, étant posée horizontalement sur deux appuis, son milieu était chargé d'un poids : ainsi, sa courbure serait celle d'une lame trapèzoïdale élastique, sans les causes physiques qui modifient le problème.

Ces causes perturbatrices sont, 1.° le défaut d'élasticité parfaite ; 2.° le décroissement de largeur dans la douve ; 3.° le défaut d'homogénéïté du bois ; 4.° l'élasticité variable des différens bois ; 5.° l'influence de l'humidité et de la température ; 6.° l'épaisseur de la douve qui diminue son élasticité ; 7.° le frottement des douves latérales ; 8.° la compression exercée par les cercles additionnels ; 9.° le poids du liquide qui agit inégalement sur les divers points de chaque douve.

On sent bien que la géométrie la plus profonde ne saurait tenir un compte exact de toutes ces causes d'anomalies, et qu'il faudrait chercher la figure particulière de chaque tonneau par l'expérience, pour parvenir à le cuber exactement : cependant, la théorie des douves élastiques donnera toujours une approximation non seulement plus que suffisante pour la pratique, mais sur-tout plus grande que toutes les autres hypothèses gratuites que l'on a imaginées jusqu'à ce jour.

Je donnerai même le moyen d'avoir égard à l'épaisseur de la douve, quand on aspirera à plus de précision. Enfin, je déduirai de ma théorie combinée avec mes expériences sur l'élasticité des bois, une formule pratique aussi simple, mais plus exacte que toutes celles connues.

Cet essai n'est que l'extrait d'un mémoire volumineux que le Ministre de l'Intérieur renvoya, en 1806, à M. *Monge* pour l'examiner, et que ce savant a déclaré avoir égaré.

Courbe génératrice du tonneau.

76. Soient (fig. 17) *ABCO* la section par l'axe d'un quart de tonneau, *CO* le demi-axe $=l$, *CB* le grand rayon $=R$, *OA* le petit rayon $=r$ $BD=R-r=h$, *AB* une demi-douve, $AP=x$ et $PM=y$ les coordonnées d'un point *M* de la courbe.

D'après ce qui précède, il faut concevoir que la demi-douve *AB*, d'abord fixée en *B* perpendiculairement à *BC*, a pris la courbure *AMB* par l'effort d'une force appliquée en *A* vers *O*. Pour découvrir la nature de la courbe *AMB*, nous supposerons, avec *Leibnitz*, 1.° que les rayons de courbure en différens points de la courbe sont en raison inverse des extensions des fibres élémentaires; 2.° que les allongemens des fibres au point *M*, sont en raison directe du bras de levier x de la puissance. De la combinaison de ces deux principes, il résulte qu'en appelant Θ le rayon de courbure, et c^2 une constante, l'équation de la courbe d'une lame élastique mince et rectangulaire est

$$\Theta x = c^2\,, \qquad (1)$$

dx étant constant, on sait que l'on a l'expression

$$\Theta = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxd^2y}\,,$$

et l'équation (1) devient

$$xdx = \frac{-c^2dx^2d^2y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{x^2}{2} + c' = \frac{-c^2dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\,,$$

ou

$$dy = \frac{-dx(x^2+2c')}{\sqrt{[4c^4-(x^2+2c')^2]}} .$$

On détermine la constante c' par la condition qu'au point B on a $\frac{dy}{dx}=0$ et $x=l$; ce qui donne $2c'=-l^2$, et change l'équation ci-dessus en celle-ci

$$dy = \frac{dx(l^2-x^2)}{\sqrt{[4c^4-(l^2-x^2)^2]}} . \qquad (2)$$

Après la seconde intégration, on détermine la nouvelle constante c'' et la premiere c, par la double condition que pour le point A, on ait $x=0$, $y=0$, et pour le point B, $x=l$, $y=h$.

77. Lorsque le tonneau a peu de courbure, c'est-à-dire, quand $\frac{h}{l}$, est fort petit, on peut avoir une intégrale algébrique fort simple de l'équation (2); car, dans ce cas, c^2, est fort grand, et en négligeant $(l^2-x^2)^2$, elle devient

$$2c^2dy=dx(l^2-x^2),$$

dont l'intégrale est

$$2c^2y=l^2x^2-\frac{x^3}{3},$$

à laquelle il n'y a pas de nouvelle constante à ajouter, parce qu'elle donne $x=0$ quand $y=0$. En déterminant c^2, par la condition qu'on ait $x=l$, quand $y=h$, on a

$$c^2=\frac{l^3}{3h},$$

et ensuite

$$y=\frac{hx}{2l^3}(3l^2-x^2). \qquad (3)$$

On serait parvenu au même résultat, en négligeant dy^2 dans la valeur de Θ.

Cette équation (3), qui est assez simple, peut être regardée comme une approximation commode et suffisante de la courbe génératrice du tonneau.

Remarque. Si (fig. 17) la force comprimente était dirigée de A vers D, son bras de levier ne serait plus x sur le point M, mais y : l'équation de la courbe serait $\Theta y = c^2$ dont l'intégrale est

$$dx = \frac{dy(y^2+2c^2-h^2)}{\sqrt{4c^4-(y^2+2c^2-h^2)^2}} \,. \qquad (4)$$

On voit qu'en changeant y en x, la dernière équation est de même nature que (2) ; mais les constantes sont différentes : l'équation (4) est celle d'un arc dont les deux extrémités sont tendues par une corde : c'est encore celle d'un linge chargé d'un fluide pesant. D'*Alembert* (*Encyclopédie*, au mot Élastique), paraît avoir confondu les deux cas des équations (2) et (4).

Dans le cas où la lame a peu d'inflexion, c devient très-grand et l'équation (4) se réduit à

$$dx = \frac{c\,dy}{\sqrt{h^2-y^2}} \,;$$

Intégrant, puis déterminant c par la condition qu'on ait $y=h$, quand $x=l=1$, on a

$$y = h.\text{Sin.}(1,5768x) = h.\text{Sin.}(90^\circ.x) \,.$$

M. *Poisson* (*Mécanique*, tom. 1, pag. 222) qui a examiné ce dernier cas, met en doute si la courbe oscille de part et d'autre de l'axe des x : je pense que non, et que cela n'a lieu ici que pour avoir supposé c très-grand, ou négligé dy^2 dans Θ.

78. Après avoir déterminé la courbure d'une douve rectangulaire ; ce qui nous a donné une première approximation de la courbe géné-

ratrice du tonneau, il faut chercher plus rigoureusement cette courbe; en ayant égard au décroissement de largeur de la douve.

Imaginons le tonneau coupé par des plans passant par l'axe, qui traceront des méridiens sur la surface. La flèche comprise entre deux méridiens très-voisins formera une douve. Les extensions des fibres qui, dans la lame rectangulaire, étaient simplement en raison directe du bras de levier x, sont de plus, en raison inverse, des points résistans ou de la largeur de la douve, quand cette largeur est variable. Il suit de là que le rayon de courbure qui est en raison inverse des bras de levier, est aussi en raison directe de la largeur de la douve : or, cette largeur est proportionnelle au rayon QM ou $(r+y)$ de la section perpendiculaire à l'axe du tonneau (fig. 17) : il s'ensuit que l'équation cherchée de la courbe est

$$\Theta x = c^2(r+y) \qquad (5)$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe génératrice du tonneau : quoique simple, en apparence, je n'ai pu parvenir à l'intégrer : MM. *Lacroix*, *Ampère* et *Petit* qui, à ma prière, s'en sont occupés, n'y ont pas réussi : je l'ai fait proposer dans les *Annales de mathématiques* (tom. 3, pag. 104) : il n'a pas paru de solution.

Voici du moins un moyen d'intégrer l'équation (5) par approximation. Soit $y = F(x)$ l'équation de la courbe cherchée : l'équation (5) deviendra

$$\frac{-c^2 dx^2 d^2 y}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x dx}{r+F(x)},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{-c^2 dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \int \frac{x dx}{r+F(x)} \qquad (6)$$

or, on connait déjà une valeur approchée $F(x)$, savoir;

$$y=\frac{hx}{2l^3}(3l^2-x^2)\ ,$$

trouvée n.° 77 : on pourra donc intégrer le second membre de (6) et procéder à la seconde intégration, attendu que les variables seront séparée.

Par ce procédé, on ne fait que substituer à la loi rigoureuse du décroissement de largeur des douves, une autre loi fort approchante donnée par une douve fictive très-peu différente de la véritable.

On peut aussi prendre, pour $y=Fx)$, un arc de section conique passant par les extrémités A et B de la demi douve, et par son milieu dont les coordonnées sont toujours, à très peu près,

$$x=\frac{1}{2}l\ ,\quad y=\frac{7}{10}h\ .$$

L'hyperbole sur-tout coïncidera sensiblement avec la vraie courbe : cette hyperbole, dont B est le sommet et BC l'axe, a pour équation

$$y=2{,}6h-\frac{2h}{l}\sqrt{1{,}69l^2-2{,}1lx+1{,}05x^2}\,]\ ;$$

cette valeur de y étant mise dans (6) pour $Fx)$, l'intégration sera plus facile que par la première valeur de $F(x)$.

Enfin, il serait possible de trouver pour y une fonction de x, qui, en coïncidant sensiblement avec la courbe à trouver, procurât deux intégrales algébriques successives ; mais il est difficile d'éviter les points singuliers de cette courbe fictive dans l'étendue de AB.

Remarque. Il est un cas qui mérite d'être examiné, c'est celui où l'on se proposerait de faire un tonneau sans fonds avec des douves décroissantes, semblables aux flèches d'un globe, ou aux côtes d'un melon, lesquelles seraient liées entre elles par un fil tendu d'un pôle à l'autre.

Dans ce cas où les y sont les bras de levier, l'équation de la courbe, d'après ce qui précède, est $\Theta y = c^2(r+y)$ ou, à cause de $r=o$ $\Theta = c^2$, c'est-à-dire que le rayon de courbure est constant, et que par conséquent la courbe est un arc de cercle. Ainsi, pour que le tonneau devienne une sphère, il suffit que $l=R=h$: ce tonneau, s'il était construit avec des flèches d'acier, offrirait l'effet curieux d'un ballon métallique élastique, sans vides entre les joints des douves.

En intégrant $\Theta = c^2$, on trouve, pour l'équation de l'arc de cercle générateur,

$$y^2+x^2-2lx+\frac{l^2-R^2}{R}y=o\ ;$$

le tonneau a, en général, la forme d'un anneau engendré par un segment de cercle tournant autour de sa corde. Si $l=o$ l'anneau est engendré par un cercle entier dont R est le diamètre, tournant autour de sa tangente en C; mais, si $l=R$, l'équation précédente se réduit à $y^2=2lx-x^2$, et fait voir que le tonneau est alors une sphère dont le rayon est $l=R$.

De la figure du merrain ou de la douve encore plane.

79. Nous avons vu qu'en donnant aux douves encore planes la forme trapézoïdale, il restait un vide entre les joints : ce vide disparaît par la forte compression qui resserre les extrémités et le milieu des douves. Si on donnait au merrain la figure curviligne assignée par la théorie, le contact serait égal et plus intime, dans toute la longueur des joints : le suintement du liquide n'aurait plus lieu quand le tonneau est sec : il en résulterait un grand perfectionnement pour l'art du tonnelier : voyons donc quelle doit être la figure du merrain $AM'B$ (fig. 18).

Nous avons vu (n.° 78) que la largeur de la douve doit être proportionnelle au rayon $(r+y)$ de la section que l'on considère ;

c'est-à-dire, qu'on doit avoir $PM' : BR :: r+y : R$: d'ailleurs, les lignes TP et TR ne sont autre chose que les développemens des arcs AM et AB de la figure 17 : en appelant donc $PT=s$, $PM'=z$, $BR=\Delta$, on aura

$$Rz=\Delta(r+y) \; ; \qquad (7)$$

on a d'ailleurs

$$s=\int\sqrt{dx^2+dy^2}] \; ;$$

lors donc qu'on aura mis dans (7) pour y sa valeur en fonction de s déduite simplement de l'équation (3) ou de l'hyperbole du n.° 78, on aura la relation entre s et z; c'est-à-dire, la courbe $AM'B$.

J'ai calculé la table ci-après qui fait connaître la largeur de la douve ou le rapport $\frac{z}{\Delta}$, pour tous les rapports $\frac{r}{R}$, des tonneaux usités, et pour dix points équidistans de la demi-douve.

80. Soit, par exemple,

$$r=425 \;, \quad R=545 \; ;$$

je divise 425000 par 545; le quotient est 780 que je cherche dans la première colonne à gauche : les nombres 780; 820; 848 ...... 1000 de la bande horizontale expriment les largeurs $M'M'$ de la douve correspondante à $s=0$, $s=1$, $s=2$ .... $s=10$, la plus grande largeur BB étant supposée 1000.

Si le quotient ne se trouve pas dans la colonne $\frac{r}{R}$, on prendra des nombres proportionnels entre ceux des deux bandes entre lesquelles tombe le quotient trouvé.

Il faut remarquer que les faces des joints doivent être inclinées et dirigées vers l'axe du tonneau : cette inclinaison est variable et se construit en faisant pour chacun des dix points M', un triangle isocèle dont les deux côtés égaux sont $r+y$, et l'autre est $M'M'$.

Table

Table des largeurs de la demi-douve divisée en dix parties dans sa longueur.

$\frac{r}{R}$; 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
700	746	790	833	872	908	939	964	983	996	1000
740	780	819	856	890	920	947	968	985	996	1000
780	814	847	878	907	933	955	974	987	997	1000
820	848	875	900	924	945	963	978	990	997	1000
860	882	903	922	941	957	971	983	992	998	1000
900	915	931	944	958	969	979	987	994	998	1000
940	949	958	967	974	981	987	993	996	999	1000
980	983	986	989	992	994	996	998	999	1000	1000

D'après ce qui précède, rien ne sera plus aisé que de donner à un ouvrier le modèle d'une douve parfaite pour un tonneau proposé.

Il est encore deux remarques utiles au perfectionnement du tonneau; 1.° il est avantageux d'augmenter le nombre des douves : le tonneau qui ne peut être qu'un polyèdre inscrit, coïncide mieux avec la surface de révolution : le nombre des joints étant plus grand, la quantité dont chacun d'eux doit être resserré, est plus petite, le contact devient plus intime et le suintement plus difficile; 2.° la courbure $\frac{h}{l}$ ne devrait pas excéder $\frac{1}{10}$ pour les mêmes motifs, et de plus, les cercles auraient moins de tendance à s'échapper.

Volume ou capacité du tonneau.

81. En conservant les dénominations précédentes, et posant de plus

$$r+y=y' \;;\quad 3,1416=\pi ,$$

$2V=$ volume du tonneau, on aura

$$V=\pi\int y'^2 \mathrm{d}x=\pi y'^2 x-2\pi\int xy'\mathrm{d}y' . \qquad (8)$$

Quand le tonneau a peu de courbure, on peut prendre, pour équation de l'arc AM, celle d'une lame élastique rectangulaire. Mettant donc dans (8) pour $\mathrm{d}y'=\mathrm{d}y$ sa valeur donnée par l'équation (2), le terme $\pi\int xy'\mathrm{d}y'$ s'intègre par parties, et remettant de nouveau pour $\mathrm{d}y'$ sa valeur, on trouvera aisément

$$V=\pi y'^2 x-\pi y'\sqrt{[4c^4-(l^2-x^2)^2]}+\pi l^2 x-\tfrac{1}{3}\pi x^3+c'' .$$

En déterminant c'', par la condition que $V=0$, quand $x=0$ et $y'=r$, et faisant ensuite $x=l$, $y'=R$, on a

$$\frac{V}{\pi}=lR^2-2Rc^2+\tfrac{2}{3}l^3+e\sqrt{[4c^4-l^4]} .$$

Cette formule est d'une application difficile, parce que la détermination de c^2 exige l'intégration préalable de l'équation (2).

82. On a une détermination plus exacte de V, en substituant dans (8) pour $\mathrm{d}y'=\mathrm{d}y$ sa valeur donnée par l'équation (6); mais les intégrations sont pénibles. J'ai pris la peine de calculer, dans cette hypothèse, la table ci-après dont l'usage est simple.

Soient $\quad D=2R$, $d=2r$, $H=2h$, $L=2l$.

Je représente la formule de capacité du tonneau entier, par

$$V=L(nD^2+n'Dd+n''d^2) , \qquad (9)$$

n, n', n'' étant trois nombres dont la somme vaut $\frac{\pi}{4}$, et qui sont donnés par la table pour chaque tonneau proposé en cette manière.

La première colonne de gauche est la valeur de $\frac{H}{L}$: les nombres qui sont en tête des autres colonnes sont la valeur de $\frac{d}{D}$: chaque case contient les trois nombres n, n', n'', correspondans aux deux rapports $\frac{H}{L}$ et $\frac{d}{D}$. Ces trois nombres sont des dix millièmes et sont censés précédés par 0.

Exemple. Soient $D=8$ décimètres, $d=7$, $L=9$, d'où $H=1$, $\frac{H}{L}=0,11$, $\frac{d}{D}=0,87$: la case qui correspond le mieux aux deux rapports 0,11 et 0,87, contient les nombres n, n', n'' qui, étant mis dans la formule (9), la changent en

$$V=9(0,3841.8^2+0,2181.7.8+0,1832.7^2)=411,95 \text{ litres.}$$

	0,95	0,90	0,86	0,82	0,78	0,74	0,70
0,05	3823 2184 1847	3830 2183 1841	3836 2182 1836	3842 2181 1831	3849 2179 1826	3856 2177 1821	3863 2175 1816
0,10	3828 2183 1843	3835 2182 1837	3841 2181 1832	3847 2180 1827	3854 2178 1822	3861 2176 1817	3868 2174 1812
0,15	3837 2180 1837	3844 2179 1831	3850 2178 1826	3856 2177 1821	3863 2175 1816	3870 2173 1811	3877 2171 1806
0,20	3848 2177 1829	3855 2176 1823	3861 2175 1818	3867 2174 1813	3874 2172 1808	3881 2170 1803	3888 2168 1798
0,25	3864 2173 1817	3871 2172 1811	3877 2171 1806	3883 2170 1801	3890 2168 1796	3897 2166 1791	3904 2164 1786
0,28	3875 2170 1809	3882 2169 1803	3888 2168 1798	3894 2167 1793	3901 2165 1788	3908 2163 1783	3915 2161 1778
0,30	3883 2167 1804	3890 2166 1798	3896 2165 1793	3902 2164 1788	3909 2162 1783	3916 2160 1778	3923 2158 1773

83. L'objet que l'on a en vue en formant des hypothèses sur la courbe génératrice du tonneau, c'est de pouvoir déterminer V en ne mesurant que les deux diamètres D, d et L. Quoique l'hypothèse des douves élastiques soit, sans contredit, plus rigoureuse qu'aucune autre, nous avons vu combien de causes physiques peuvent en altérer la loi. Lors donc qu'on aspirera à une grande précision, il faudra recourir à une formule indépendante de toute hypothèse, et fondée uniquement sur la forme particulière de chaque tonneau. La méthode exposée (Chap. IX, n.° 68) fournit cette formule.

On mesurera un certain nombre de circonférences c_0, c_1, c_2, ... correspondantes aux divisions égales de l, et en appelant G l'épaisseur des douves, les ordonnées ou rayons des sections circulaires seront

$$y_0 = r = \frac{C_0}{2\pi} - G, \quad y_1 = \frac{C_1}{2\pi} - G, \quad y_2 = \frac{C_2}{2\pi} - G \ldots\ldots$$

On peut aussi, pour avoir y_0, y_1, y_2 ...., mesurer les distances de la courbe à une ligne parallèle à l'axe, et passant par le bondon.

Ayant substitué les valeurs de y_0, y_1, y_2 ,...... dans l'une des formules de l'article cité, on aura V avec le degré d'exactitude désiré, mieux et plus promptement que par aucun autre moyen.

Volume d'un segment du tonneau ou vidange.

84. Pour compléter la théorie du jaugeage, il reste à trouver le volume du segment occupé par le liquide, quand le tonneau n'est pas plein, c'est-à-dire, la vidange : ce problème serait difficile dans l'hypothèse de la douve élastique décroissante ; mais, il s'agit bien moins d'avoir rigoureusement le volume du segment que son rapport à celui du tonneau, qui est déjà connu : ainsi, en prenant pour courbe génératrice, une courbe simple comme la parabole, l'erreur qui en résulte pour le segment est, en grande partie, compensée

par celle qui affecte le tonneau entier ; en sorte que le rapport des deux volumes n'est pas sensiblement altéré.

J'ai donc pris, pour courbe génératrice $y'^2 R^2 - \frac{R^2-r^2}{l} x'$ dans laquelle $x' = CQ$, $y' = QM$, et j'ai calculé la table suivante qui me paraît fournir le moyen le plus simple pour déterminer la vidange.

Soit K la distance verticale du niveau du liquide au plan horizontal passant par l'axe supposé horizontal du tonneau : la première colonne à gauche exprime les rapports $\frac{R-K}{D}$: les nombres en tête des colonnes sont les valeurs de $\frac{d}{D}$: enfin, les nombres qui sont dans les cases donnent, en millièmes, le rapport du plus petit des deux segmens au tonneau entier. Ce segment est occupé par le liquide, si le niveau est en dessous de l'axe ; il est, au contraire, vide quand le liquide est en dessus.

85. *Exemple.* Soient

$$D = 554 \ , \quad d = 477 \ ;$$

la distance du liquide à l'extrémité la plus proche du diamètre du bondon ; c'est-à-dire, $R-K = 233$: on a

$$\frac{R-K}{D} = 0{,}42 \ , \quad \frac{d}{D} = 0{,}86 \ .$$

Je cherche, dans la première colonne de gauche, le nombre 0,42 ; et dans la rangée supérieure 0,86. La case correspondante est 393 : j'en conclus que le volume du plus petit des deux segmens est 0,393 du tonneau entier : c'est le rapport de la vidange, si le liquide est plus bas que le centre ; mais, dans le cas contraire, le rapport sera 1—0,393 ou 0,607 du tonneau entier.

On sent que, si les deux quotiens trouvés ne se rencontrent pas, soit dans la colonne de gauche, soit dans la bande supérieure, il faudra prendre des parties proportionnelles.

Si le tonneau reposait sur l'un des fonds, on aurait facilement la vidange, en considérant le segment compris entre le liquide et le cercle du bondon, comme une demi-tonneau particulier.

	0,70	0,75	0,80	0,83	0,86	0,89	0,92	0,94	0,96	0,98
0,04	4	4	5	6	7	8	8	9	11	13
0,08	18	19	21	22	24	27	29	31	33	35
0,12	39	42	47	50	53	56	59	61	63	65
0,16	70	75	81	84	87	90	94	96	98	100
0,20	109	114	120	123	126	129	133	135	137	139
0,24	152	156	163	166	169	172	176	178	180	182
0,28	200	205	210	213	216	219	221	223	225	227
0,32	249	254	259	262	264	267	269	271	273	275
0,36	303	307	311	313	315	318	320	321	322	323
0,40	358	361	363	365	367	369	370	371	372	372
0,42	386	388	390	392	393	395	396	396	397	398
0,44	414	416	417	418	420	421	422	422	423	423
0,46	443	444	445	446	446	447	447	448	448	449
0,48	471	471	472	472	473	473	473	474	474	474
0,50	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Accord de la théorie avec l'expérience.

86. Il restait à vérifier jusqu'à quel point la théorie des douves élastiques décroissantes, s'accordait avec l'expérience : il serait illusoire de faire cette vérification sur des tonneaux : ils sont si mal conformés, et tant de causes produisent des anomalies, que chacun d'eux conduirait à une formule différente de capacité.

Il y avait une autre espèce de vérification plus propre à conduire au but : elle consiste à faire ployer des règles en bois ; à mesurer très-exactement les ordonnées des courbes qu'elles prennent, et à en déduire le volume du solide de révolution engendré.

Trois élémens principaux concourent au résultat ; savoir : $\frac{D-d}{L}$, $\frac{d}{D}$, $\frac{G}{L}$; G étant l'épaisseur uniforme de la règle : j'ai varié les expériences sur des règles bien homogènes, les unes rectangulaires, les autres trapézoïdales, plus ou moins épaisses, plus ou moins courbées, afin de connaître l'influence particulière de chacon des trois élémens ci-dessus, sur la formule

$$V=L(nD^2+n'Dd+n''d)^2 ;$$

voici le résultat de ces expériences.

1.° Quand $\frac{D-d}{L}$ est très-petit, les règles trapézoïdales, quelle que soit leur épaisseur, donnent le même résultat qu'une lame mince à ressort parfait.

2.° Quand $\frac{G}{L}$ excède $\frac{6}{1000}$, le coefficient n, et par conséquent la capacité, diminuent d'autant plus que $\frac{D-d}{L}$ augmente.

3.° n où la capacité augmente à proportion que $\frac{d}{D}$ est plus petit, quel que soit d'ailleurs le degré de courbure $\frac{D-d}{L}$; cette loi est conforme à la théorie.

4.° Quand $\frac{G}{L}=\frac{10}{1000}$ et $\frac{D-d}{L}=\frac{1}{5}$, la plupart des règles, si le bois est sec, se rompent.

87. Il suit, de ce qui précède, que quand $\frac{G}{L}$ excède 0,006, la table de capacité du n.° 82 n'est plus exactement conforme à l'expérience. J'ai calculé la suivante pour les cas où l'on aspirerait à une plus grande précision ; sa formation et son usage sont les mêmes que pour celle du n.° 82 ; mais, elle est subdivisée en quatre parties correspondantes à quatre épaisseurs différentes de la douve : ainsi, pour un tonneau pour lequel $\frac{G}{L}$ vaudrait 0,026, on emploirait la troisième table ayant pour titre $\frac{G}{L}=0{,}024$, qui se

rapproche le plus de l'épaisseur 0,026 du tonneau proposé : pour plus de précision encore, il faudrait faire des intercalations.

Epaisseur de la douve $\frac{G}{L}=0{,}006$				
	0,95	0,90	0,80	0,70
0,05	3821 2185 1848	3828 2184 1842	3843 2181 1830	3861 2176 1817
0,10	3821 2186 1847	3828 2185 1841	3843 2182 1829	3861 2177 1816
0,20	3822 2188 1844	3829 2187 1838	3844 2184 1826	3862 2179 1813
0,30	3826 2190 1838	3833 2189 1832	3848 2186 1820	3866 2181 1807

Épaisseur de la douve $\frac{G}{L}=0{,}015$				
	0,95	0,90	0,80	0,70
0,05	3811 2189 1854	3818 2188 1848	3833 2185 1836	3851 2180 1823
0,10	3792 2198 1864	3799 2197 1858	3814 2194 1846	3832 2189 1833
0,20	3722 2228 1904	3729 2227 1898	3744 2224 1886	3762 2219 1873
0,30	3612 2277 1965	3619 2276 1959	3634 2273 1947	3652 2268 1934

Épaisseur de la douve $\frac{G}{L}=0{,}024$				
	0,95	0,90	0,80	0,70
0,05	3795 2196 1863	3802 2195 1857	3817 2192 1845	3835 2187 1832
0,10	3739 2218 1897	3746 2217 1891	3761 2214 1879	3779 2209 1866
0,20	3548 2297 2009	3555 2296 2003	3570 2293 1991	3588 2288 1978
0,25	3409 2354 2091	3416 2353 2085	3431 2350 2073	3449 2345 2060

Épaisseur de la douve $\frac{G}{L}=0{,}033$				
	0,95	0,90	0,80	0,70
0,05	3773 2205 1876	3780 2204 1870	3795 2201 1858	3813 2196 1845
0,10	3662 2246 1946	3669 2245 1940	3684 2242 1928	3702 2237 1915
0,15	3507 2312 2035	3514 2311 2029	3529 2308 2017	3547 2303 2004

Conclusion.

Conclusion.

88. Il résulte, de tout ce que nous avons dit, que le tonneau est trop irrégulier, et que sa forme dépend d'un trop grand nombre de causes physiques, pour qu'il soit possible de le soumettre à une théorie entièrement rigoureuse : voici ce qu'il y a de mieux à faire dans tous les cas.

1.° On obtiendra la plus grande approximation possible par la méthode du n.° 83, quand le besoin l'exigera.

2.° La table du n.° 87 fournira l'approximation la plus grande qu'on puisse obtenir, en ne mesurant que les quatre dimensions D, d, G, L.

3.° La table du n.° 82 donnera toute la précision qu'on peut avoir par les seuls élémens D, d, L.

4.° La formule qui convient le mieux à la pratique ordinaire, est celle qui tient le milieu entre celles de la table du n.° 87, et qui correspond aux rapports

$$\frac{G}{L}=0{,}018\ ,\quad \frac{D-d}{L}=0{,}1\ ,\quad \frac{d}{D}=0{,}85\ ;$$

elle est

$$V=L(0{,}3790D^2+0{,}2201Dd+0{,}1863d^2)\ ,$$

et diffère très-peu de la suivante, qui est un peu plus commode,

$$V=0{,}7754L(\tfrac{7}{11}D+\tfrac{4}{11}d)^2=0{,}006491L(7D+4d)^2\ . \qquad (10)$$

On peut éviter l'embarras de mesurer D, en prenant extérieurement, avec une règle, la valeur de $h=R-r$: alors la formule est

$$V=3{,}1416.L(r+0{,}64.h)^2 \qquad (11)$$

En mesurant extérieurement la circonférence C du bondon, et

celle *c* des fonds, et appelant *g* l'épaisseur de la douve, la formule serait

$$V=0,0006576L(7C+4c-69,11.g)^2 . \qquad (12)$$

Je dois prévenir que la formule de M. *Dez* est un peu plus faible, et celle de M. *Bazaine* un peu plus forte que les précédentes.

5.° Les logarithmes s'appliquent très-simplement aux formules précédentes, et elles n'exigent qu'une table des 1500 premiers nombres; toute l'opération se réduit à l'addition de trois logarithmes dont un est toujours le même; il n'est point de jaugeurs qui ne puissent pratiquer ce petit calcul : il me semble que ce procédé est bien préférable à l'emploi des jauges qui ne tiennent aucun compte des fractions, et qui reposent toutes sur des principes plus ou moins erronés.

ADDITIONS.

Sur le N.° 20.

QUAND on a quelques valeurs approchées $x_1 = l$, $x_2 = l_1 + l_2$, $x_3 = l_1 + l_2 + l_3$ .... de la racine cherchée x, on peut en obtenir une nouvelle encore plus approchée, par une méthode que j'ai déduite de celle qu'a donnée *Lagrange* (*Séances de l'école normale*, tom. 4, pag. 420), pour calculer la courbe des erreurs, et interpoler des termes dans une série d'observations.

Soient $X = 0$ l'équation à résoudre, $X = y$ la courbe parabolique en x et y; y_1, y_2, y_3, y_4 ...... les valeurs de y que l'on obtient en mettant x_1, x_2, x_3, x_4 .... dans X : il s'agit de trouver pour x la valeur correspondante à $y = 0$; c'est-à-dire, la supposition pour x qui rend nulle l'erreur y : cette valeur cherchée de x sera donnée par la formule

$$x = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 \ldots\ldots\ldots$$

dans laquelle on a fait

$$A = \frac{y_2 y_3 y_4}{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_4 - y_1)}, \quad B = \frac{y_1 y_3 y_4}{(y_1 - y_2)(y_3 - y_2)(y_4 - y_2)},$$

$$C = \frac{y_1 y_2 y_4}{(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(y_4 - y_3)}, \quad D = \frac{y_1 y_2 y_3}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)},$$

en observant que chaque fraction a autant de facteurs moins un, qu'il y a d'observations x_1, x_2, x_3, x_4 ....

Si l'on applique la formule précédente à l'exemple du n.° 22, on trouve $x = 0{,}5849$; la vraie valeur est $x = 5857$.

Au reste, la méthode précédente, quoique curieuse et piquante, le cède néanmoins, pour la brièveté et la sureté, à celle des n.os 20 et 21. On peut remarquer, en passant, que la formule qu'a donnée M. *Kramp* (*Annales de mathématiques*, tom. VI, pag. 286) pour intégrer par approximation Xdx, est exactement la même que celle de M. *Lagrange*, citée plus haut.

Sur le N.o 25.

J'ai dit, dans ce numéro, qu'avant de se livrer à la recherche des racines, il était utile de connaitre le nombre des imaginaires : ainsi, dans l'exemple du n.° 22, si l'on avait su d'avance que la proposée avait deux racines imaginaires, on en aurait conclu que le couple des 2.mes et 3.mes racines ne pouvait être réel, puisque la première l'était.

Sur le Chapitre VI.

Je n'ai point parlé dans ce chapitre de la manière de déterminer les quantités réelles α, β qui entrent dans les racines imaginaires $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; on a pour cela diverses méthodes qui reviennent toutes à chercher les racines réelles d'une équation : on les trouve dans tous les livres, et je n'ai rien à ajouter sur cette matière.

N. B. En sollicitant l'indulgence du public en faveur de ma cécité, qu'il me soit permis d'acquitter une dette sacrée, celle de la reconnaissance paternelle envers ma fille *Rosine*, âgée de 17 ans, qui, renonçant aux amusemens de son âge, a eu l'héroïque patience de faire tous les calculs de cet ouvrage : puisse ce monument de la piété filiale lui mériter l'estime publique.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 07494 5349





